数学展望 I **第 3 回：正多面体の仲間達**

「正多面体」と「平面充填形」には自然な関係がある.
この関係を一般化したものが 「アルキメデスの平面充填形」と「準正多面体」の関係である.

テーマ：**サッカーボール型の多面体** $[5,6,6]$ **が正 20 面体から得られることを観察しよう**.

2.1 正多面体と平面充填形

正多面体には 5 種類の型があり, その型 (p,q) の取りうる値は, 面の少ない順に

$$(p,q) \quad = \quad (3,3), \quad (4,3), \quad (3,4), \quad (5,3), \quad (3,5)$$

である (詳しくは, 第 1 回 §1.3 正多面体の分類を参照).

実際, この組をすべて決定するには, 次の考察をすればよい. 正多面体の各面は正 p 角形だから, その 1 つの角の大きさは

$$\frac{p-2}{p}\pi$$

である. そのようなものが 1 つの頂点の回りに q 個ずつ集まるので, その和は

$$\frac{p-2}{p}\pi \times q < 2\pi \qquad \text{すなわち,} \quad \underline{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}}$$

を満たさなければならない. これを満たす (3 以上の) 整数 p, q の組を決定すればよい[1].

ところで,

$$\frac{p-2}{p}\pi \times q = 2\pi \qquad \text{すなわち,} \quad \underline{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}}$$

のときは, 正 p 角形が (1 つの頂点の回りに) q 個ずつ集まって平面を埋めつくす. このような図形をそれぞれ型

$$(p,q) \quad = \quad (3,6), \quad (4,4), \quad (6,3)$$

を持つ **平面充填形** と呼ぶ.

図：平面充填形のリスト (「正多面体を解く」より)

[1] p 角形が q 個ずつ集まる, とだけ仮定しても通用する証明を第 3 回に述べる.

2.2　アルキメデスの平面充填形と準正多面体

定義 2.1. 辺の長さが等しい 正 p_1 角形, 正 p_2 角形,..., 正 p_r 角形が 1 つの頂点の回りにすきまなく集まってできた平面図形を**型** $[p_1, p_2, \ldots, p_r]$ **を持つアルキメデスの平面充填形**と呼ぶ.

補題 2.2. $[p_1, \ldots, p_r]$ がアルキメデスの平面充填形をなすとき, 次が成立する.

(1) $3 \leq r \leq 6$.

(2) 頂点の周りの角の和が 2π だから,

$$\left(1 - \frac{2}{p_1}\right)\pi + \cdots + \left(1 - \frac{2}{p_r}\right)\pi = 2\pi \quad \text{すなわち,}\ \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_r} = \frac{r}{2} - 1$$

が成立する.

(3) $r = 3$ のとき, 番号をつけかえれば次のどちらかにできる:

(a) p_1, p_2, p_3 すべてが偶数である.

(b) p_1 は奇数で, $p_2 = p_3$ は偶数である.

上の補題を用いて, 平面充填形になる場合 (自明な場合) を除くと, 次が得られる.

定理 2.3. (自明でない) アルキメデスの平面充填形の型は, 次の場合に限られる:

$$\begin{array}{llll} [3,12,12], & [4,6,12], & [4,8,8], & [3,6,3,6], \\ [3,4,6,4], & [3,3,3,3,6], & [3,3,3,4,4], & [3,3,4,3,4]. \end{array}$$

図：アルキメデスの平面充填形のリスト (「正多面体を解く」より)

「アルキメデスの平面充填形」の多面体版が「準正多面体 (アルキメデスの多面体)」である.

定義 2.4. どの平面にも含まれない凸多面体 $\mathcal{P}$ が **準正多面体(アルキメデスの多面体)** であるとは,

(1) 各面は正多角形である. ただし, 辺の数はすべての面で同じではない.

(2) 各頂点での多角錐は合同である.

を満たすときに言う. 先のように $\mathcal{P}$ を記号 $[p_1, \ldots, p_r]$ を用いて表す.

アルキメデスの平面充填形の場合と同様に, 次を用いて準正多面体の候補を絞り, 完全なリストを作成することができる.

補題 2.5. $[p_1, \ldots, p_r]$ が準正多面体をなすとき, 次が成立する.

(1) $3 \leq r \leq 6$.

(2) 頂点の周りの角の和が 2π 未満だから,

$$\left(1 - \frac{2}{p_1}\right)\pi + \cdots + \left(1 - \frac{2}{p_r}\right)\pi < 2\pi \quad \text{すなわち,} \ \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_r} > \frac{r}{2} - 1$$

が成立する.

興味深い例を 1 つだけあげておこう.

例 2.6. 準正多面体 $[5, 6, 6]$ は**サッカーボール**型の凸多面体であり, **フラーレン** C_{60} の炭素元素の配置としても知られている.
これは, 正 20 面体の各辺を 3 等分した点を頂点として, もとの頂点部分をカットして得られる.

フラーレンとは, 黒鉛, ダイヤモンドに続く第 3 の炭素の総称を指す.
呼び名に関しては, この形を好んだ建築家の名前を取ったものらしい.
ここでは, 最も代表的な例である C_{60} のことをフラーレンと呼んでいる.

図：準正多面体のリスト (「正多面体を解く」より)