数学展望 I レポート問題 [2] (6 月 16 日)

(1) 以下の問題の中から **2 題を選び** 解答し, 提出すること. 締め切りは **7 月 10 日 (月)** とする.

(2) **A4 の大きさのレポート用紙** (表面のみ 使用) に解答すること.

(3) (2) の他に**表紙 1 枚**をつけ, **氏名と学籍番号**を記入し, レポート名「**数学展望 I 第 2 回レポート**」を明記すること.

(4) 作成にあたっては, 講義で学んだどのような結果を用いたか, また, どのような考え方をして答えを導いたかができるだけ明確にすること.

問 1. 次の条件をすべてみたす正の整数 N のうち, 最小のものを求めよ:

(a) N は 17 で割ると余りが 2 である.
(b) N は 61 で割ると余りが 58 である.
(c) N は 103 で割ると余りが 1 である.

(**解答する際のヒント**)

- N を見い出すには, 第 6 回に講義で説明した**中国式剰余定理**を用いるとよい.
- 中国式剰余定理の利用にあたって, $n_1 \equiv 1 \pmod{17}$, $n_1 \equiv 0 \pmod{61 \cdot 103}$ を満たすような n_1 を見つけることが必要であるが, それには**ユークリッドの互除法**を利用すると良いだろう.
- 求めた N が確かに条件を満たすことを**確認する**ことが望ましい.

問 2. 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の単位円を n 等分して正 n 角形 $P_0P_1\cdots P_{n-1}$ を作る：

$$P_k\left(\cos\frac{2k\pi}{n}, \sin\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

この正 n 角形の P_0 を P_1 まで回転させて得られる合同変換を A とし, A の逆回転を A^{-1}, A を k 回続けて行なう変換を A^k のように書くとき, **折り返しを含まない合同変換**は,

$$E = A^0, A = A^1, \ldots, A^{n-1}$$

の n 個である. ただし, E は**恒等変換** (P_0 を P_0 にうつす変換) を表す.

A^k を何回か行なうと, P_0 を P_0 にうつす恒等変換になる. そのような回数の最小値, すなわち,

$$o(A^k) = \min\{\ell \in \mathbb{Z} \mid \ell \text{ は正の整数},\ (A^k)^\ell = E\}$$

を A^k の**位数**と言う. このとき, 次の各問に答えよ.

(1) 正 12 角形に対して, P_0 の行き先を追うことにより, 「折り返しを含まない合同変換」$E, A, A^2, \ldots, A^{11}$ の位数をそれぞれ求めよ.

(2) 一般に, A^k の位数は $\dfrac{n}{(n,k)}$ で与えられることを示せ.

各 n に対して, $\varphi(n) = \#\{k \in \mathbb{Z} \,|\, 1 \le k \le n,\ o(A^k) = n\}$ とおく.

(3) $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(12) = 4$ を示せ.

(4) $\dfrac{\varphi(n)}{n} = \dfrac{1}{2}$ となるような整数 n を全て決定せよ.

(解答する際のヒント)

• (1) 例えば, $A^3\colon P_0 \to P_3 \to P_6 \to P_9 \to P_0 (= P_{12})$ だから, $o(A^3) = 4$ である. ここでは, (2) の公式を用いないこと.

• (2) を示すには, $\ell = \frac{n}{(n,k)}$ に対して

(i) $A^{k\ell} = E$ と,

(ii) $A^{km} = E \Longrightarrow m$ は ℓ で割りきれる

を示せばよい.

• (3) は (1) から従う. $12 = 3 \cdot 4$ であるが, $\varphi(12) = \varphi(3) \cdot \varphi(4)$ となっているのは偶然だろうか？

• (4) 小さい n に対していろいろと計算してみれば候補は見つかるだろう. 完全に決定するのは難しいかも知れないが, 部分的成果でもよい.

問 3. 正4面体の合同変換について考える．正4面体の頂点を P_1, P_2, P_3, P_4 とするとき，

は, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ のように4次の置換として表すことができる.

(1) $(12)(34) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ は $(123) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ のように3つの頂点のみを動かす型の置換の2個の積で表すことができる．具体的に表せ.

(2) 正4面体の合同変換の全体は上に述べた対応により **4次交代群** A_4 をなす．4次交代群の元を3つの型に分けてすべて書き出せ．また, それぞれの型の代表元はどのような回転軸を持つかを説明せよ.

(3) 4次交代群の各元は**互換** (2個の文字のみを動かす変換) の偶数個の積で表すことができることを示し, 互換 ((12) としてよい) に対応する合同変換は存在しないことを導け.

(4) $\mathbb{R}^3$ 内の回転では「{**向き**」(3つの1次独立なベクトルから作られる行列式の符号) が変化しないことに注意して, 前問の結論を幾何学的に説明せよ.

(**解答する際のヒント**)

- (1) は実際, 各面の三角形を回転させて, 欲しい形と比較してみよう.
- (2) は講義の要約を参照して実際に元を書きだしてみよう.
- (3) 実際，4次交代群の各元は丁度2個の互換の積で書ける．後半は互換が偶置換でないことに注意せよ.
- 中心を原点にとれば, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ は1次独立である．前問のような互換を1回行うと行列式の符号が変わる, という事実は線形代数学で習っているだろう.

問 4. 正6面体の合同変換は, 正6面体の4つの対角線 P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, P_4Q_4 に関する置換を引き起こす. また, 異なる合同変換は異なる置換を引き起こす.

これより, 正6面体群は自然に4次対称群の部分群とみなすことができる. 正6面体の6つの面を $F_1, \ldots, F_6$ とする.

(1) 次の事実に注意して, 正6面体群の位数は 24, 特に, 正6面体群＝4次対称群 S_4 となることを示せ.

  (a) 各 $i = 1, \ldots, 6$ に対して, F_1 を F_i にうつす合同変換が存在する.

  (b) F_1 を F_i にうつす合同変換 σ, σ' の違いは F_i をその中心の周りに回転させるだけの違いである.

(2) 面 F_1 を四角形 $P_1P_2P_3P_4$, 面 F_2 を四角形 $P_1P_4Q_2Q_3$ とするとき, F_1 を F_2 にうつす合同変換を表す置換を具体的に書け. また, (34) に対応する合同変換はどのようにして得られるかを説明せよ.

(3) 互換 (12) を置換 $\sigma = (123)$ と $\tau = (1234)$ のいくつかの積の形に表せ.

(4) 2つの置換 $\sigma = (123)$ と $\tau = (1234)$ を含む S_4 の部分群は自分自身に他ならないことを証明せよ. また, この事実を合同変換の視点から説明せよ.

(解答する際のヒント)

• (1) は講義における説明をもう少し丁寧にしたものである. 「さいころ」だと思えば考えやすいのではないだろうか.

• (2) 最初の変換は4回で元に戻るから, 位数が4の元に対応している. 後半は PQ の違いを無視して, 上面の頂点の変化に注目するのがポイントである.

• (3),(4) ラグランジェの定理「有限群 G の部分群 H の位数は G の位数の約数である. 特に, G に属する元の位数についても同様である. 」を用いると, (4) の部分群は位数が 12 の倍数で, 24 の約数であることがすぐに分かる. また, (1234) は奇置換なので, それは4次交代群に含まれず, S_4 自身である, という流れになる. ここでは, (3) のように必要な互換を全部表してしまえばよい. 実際, すべての互換, 従って, すべての置換は (12), (13), (14) の積でかけてしまう.

問 5 (予告編).

(発展) 正 12 面体群が5次交代群 (に同型) であることを説明せよ.