2.2 よい近似分数

この節では無理数 ω に近い有理数 $\frac{p}{q}$ に対して，その「近似のよさ」をフォードの円を介して図形的に考える．特に ω の近似分数 α_n が「ω のよい近似」となっていることを視覚的に理解する．

$\sqrt{2}$ と π の収束分数のフォードの円

$\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$ の近似分数 $\alpha_n = [1, \overbrace{2, \ldots, 2}^{n}]$ は $\alpha_{n+2} = \alpha_n \oplus \alpha_{n+1} \oplus \alpha_{n+1}$ を満たすので，$\alpha_{-1} = \frac{1}{0}, \alpha_0 = \frac{1}{1}$ より

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{3}{2} = 1.5 \\
\alpha_2 &= \frac{7}{5} = 1.4 \\
\alpha_3 &= \frac{17}{12} \approx 1.4167 \\
\alpha_4 &= \frac{41}{29} \approx 1.4138 \\
\alpha_5 &= \frac{99}{70} \approx 1.414286 \\
\alpha_6 &= \frac{239}{169} \approx 1.414201
\end{aligned}$$

となる．対応するフォードの円を図 2.8 に表す．この図を見ると，$\alpha_2 = \frac{7}{5}$ や $\alpha_3 = \frac{17}{12}$ のフォードの円は，$\sqrt{2}$ に近いその他の有理数のフォードの円に比べて際だって大きいことが見て取れる．そういう意味で $\frac{7}{5}$ や $\frac{17}{12}$ は $\sqrt{2}$ のたいへんスジのよい近似であるといえる．

では次に $\pi = 3.141592653589\ldots$ を近似する分数を考える．

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, \ldots]$$

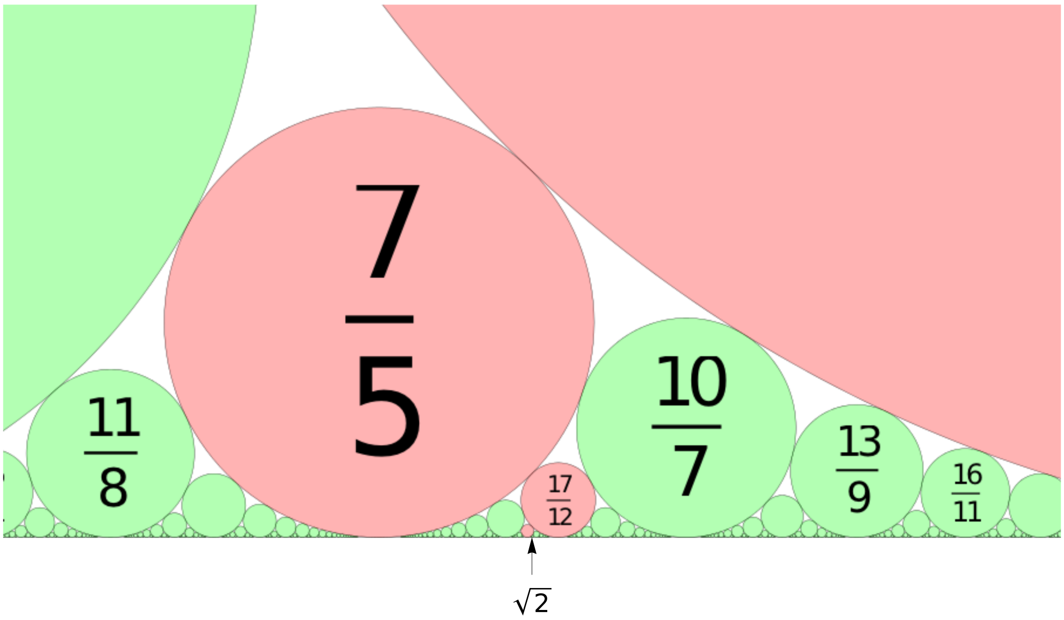

図 2.8: $\sqrt{2}$ の近似分数のフォードの円（赤）

を既知とする．π の収束分数を $\{\alpha_n\}$ とするとき $\alpha_{-1} = \frac{1}{0}$ と $\alpha_0 = \frac{3}{1}$ より

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_{-1} \oplus \overbrace{\alpha_0 \oplus \cdots \oplus \alpha_0}^{7} &= \frac{22}{7} &\qquad \approx 3.1429 \\
\alpha_2 &= \alpha_0 \oplus \overbrace{\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_1}^{15} &= \frac{333}{106} &\qquad \approx 3.1415094 \\
\alpha_3 &= \alpha_1 \oplus \alpha_2 &= \frac{355}{113} &\qquad \approx 3.14159292 \\
\alpha_4 &= \alpha_2 \oplus \overbrace{\alpha_3 \oplus \cdots \oplus \alpha_3}^{292} &= \frac{103993}{33102} &\qquad \approx 3.14159265301
\end{aligned}
$$

となる．4 番目の近似分数 α_4 においてすでに小数点以下 9 桁まで正しい値となっている．図 2.9 と図 2.10 には $\alpha_1 = \frac{12}{7}$, $\alpha_2 = \frac{333}{106}$, $\alpha_3 = \frac{355}{113}$ のフォードの円が描かれている．$\alpha_1 = \frac{22}{7}$ と $\alpha_3 = \frac{355}{113}$ のスジのよさが実感できるであろう．一方で，同じ近似分数でも $\alpha_2 = \frac{333}{106}$ は $\alpha_3 = \frac{355}{113}$ に比べるとスジが悪い．

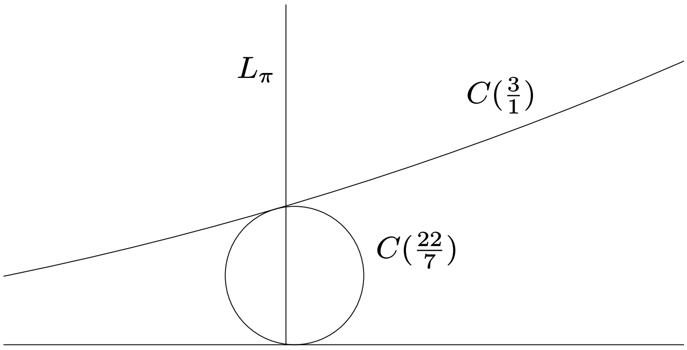

図 2.9: $C(\frac{3}{1})$ と $C(\frac{22}{7})$

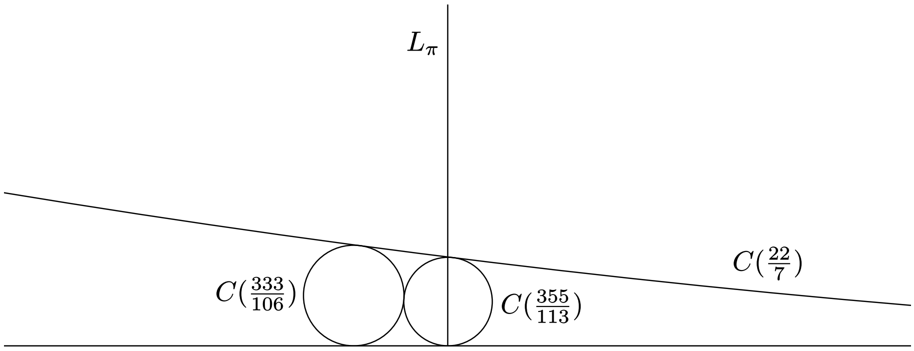

図 2.10: $C(\frac{22}{7})$ と $C(\frac{333}{106})$, $C(\frac{355}{113})$

近さを測る指標

無理数 ω と有理数 $\frac{p}{q}$ の「近さ」を測る指標として，もっとも単純なのは

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right|$$

であろう．しかし，これだと

$$\left|\sqrt{2} - \frac{1414}{1000}\right| < \left|\sqrt{2} - \frac{17}{12}\right|$$

のように $\sqrt{2}$ に対して $\frac{17}{12}$ よりも近い有理数はいくらでも存在して，$\frac{17}{12}$ の「よさ」が伝わりにくい．そこで以下では次の 2 つの指標

$$D_\omega\left(\frac{p}{q}\right) = q\left|\omega - \frac{p}{q}\right|, \quad G_\omega\left(\frac{p}{q}\right) = q^2\left|\omega - \frac{p}{q}\right|$$

を導入し，順にその性質をみていこう．

近さを測る指標（その１） $D_\omega\left(\frac{p}{q}\right)$

ここでは

$$D_\omega\left(\frac{p}{q}\right)=q\left|\omega-\frac{p}{q}\right|=|q\omega-p|$$

の性質を調べる．簡単にいうと，$D_\omega\left(\frac{p}{q}\right)$ が小さいということは「分母が小さい割には ω に近い」ことを表す．この量 $D_\omega\left(\frac{p}{q}\right)$ には幾何的な意味づけがある．私はこのことを I. Short の解説 [10] で学んだ．いま上半平面に含まれる円で x 軸と ω で接して $C(\frac{p}{q})$ とも接するもの（これを $C_\omega(\frac{p}{q})$ と表す）を考えるとその円の半径が

$$\frac{1}{2}|q\omega-p|^2=\frac{1}{2}D_\omega\left(\frac{p}{q}\right)^2$$

となる（図 2.11 の赤円は $C_\omega(\alpha_n)$ を表す）．従って $C_\omega(\frac{p}{q})$ の半径が小さいほど $D_\omega(\frac{p}{q})$ の値が小さくなる．

具体例で見ると $D_{\sqrt{2}}(\frac{17}{12})\approx 0.0294$ である．一方で $D_{\sqrt{2}}(\frac{141}{100})\approx 0.4213$ となるので，$\frac{17}{12}$ は $\frac{141}{100}$ よりも（この意味で）よい近似であるといえる．また π に関しては $D_\pi(\frac{22}{7})\approx 0.00885$, $D_\pi(\frac{333}{106})\approx 0.00882$, $D_\pi(\frac{355}{113})\approx 0.00003$ となる．特に $\frac{22}{7}$ と $\frac{355}{106}$ は同程度の近似のよさであるといえる．このことは $C_\pi(\frac{22}{7})$ や $C_\pi(\frac{355}{106})$ が同程度の半径の円であることを意味するが，これは図 2.10 においてどちらの円も $C(\frac{355}{113})$ にほとんど重なるであろう様子から納得できる．

さて，無理数 ω の近似分数 $\alpha_n=\frac{p_n}{q_n}$ に関して，定理 1.12 (2) より

$$\frac{1}{(q_{n+1}+q_n)q_n}<|\omega-\alpha_n|<\frac{1}{q_{n+1}q_n}$$

が成立していた．これを $D_\omega(\alpha_n)=q_n|\omega-\alpha_n|$ を用いて書き直すと次のようになる．

定理 2.5. 無理数 ω の収束分数列を $\{\alpha_n=\frac{p_n}{q_n}\}_{n=0}^\infty$ とするとき，任意の $n\geq 0$ に対して

$$\frac{1}{q_{n+1}+q_n}<D_\omega(\alpha_n)<\frac{1}{q_{n+1}}$$

が成り立つ．

この主張は図形的にに考えると直ちに得られる．実際，円 $C_\omega(\alpha)$ の半径が $\frac{1}{2}D_\omega(\alpha_n)^2$ であったので，この半径が $\frac{1}{2(q_{n+1}+q_n)^2}$ より大きく $\frac{1}{2q_{n+1}^2}$ より小さいことを示せばよいが，これは補題 2.4 と図 2.11 より明らかである．

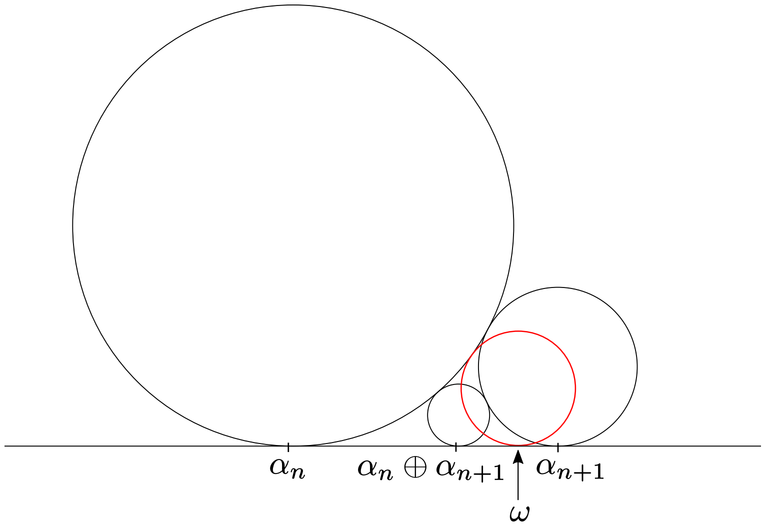

図 2.11: α_n, α_{n+1}, $\alpha_n \oplus \alpha_{n+1}$ のフォードの円と $C_\omega(\alpha_n)$（赤）

図 2.11 から次の主張も読み取れる：

定理 2.6. 無理数 ω の収束分数列を $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ とするとき，任意の $n \geq 0$ に対して

$$D_\omega(\alpha_{n+1}) < D_\omega(\alpha_n)$$

が成り立つ．

実際，$C_\omega(\alpha_n)$ よりも $C_\omega(\alpha_{n+1})$ が小さいことをいえばよいが，これは図 2.11 より明らかである．ここで補題 2.4 より ω は α_{n+1} と $\alpha_n \oplus \alpha_{n+1}$ 間にいることに注意しよう．

次の定理は無理数 ω の近似分数は D_ω に関していい性質を持っていることを示す．

定理 2.7. 無理数 ω の収束分数列を $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ とする．このとき，有理数 $\frac{s}{t} \neq \frac{p_n}{q_n}$ に対して $t < q_{n+1}$ ならば

$$D_\omega\left(\frac{s}{t}\right) > D_\omega\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$$

が成り立つ．

証明. $t < q_{n+1}$ より $C(\frac{s}{t})$ のサイズは $C(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}})$ よりも大きい．ここでフォード

の円は互いに交わらないことと ω は $\frac{p_n}{q_n}$ と $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ の間にいることから，$\frac{s}{t}$ は開区間 $(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}})$ には含まれない．また $\frac{s}{t} \neq \frac{p_n}{q_n}$ と $t < q_{n+1}$ より $\frac{s}{t}$ は閉区間 $[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}]$ にも含まれない．このような $\frac{s}{t}$ に対して $D_\omega\left(\frac{s}{t}\right) > D_\omega\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ となることは（例えば図 2.11 を見ながら考えれば）明らかである． □

定義 2.8. 有理数 $\frac{p}{q}$ が無理数 ω の**最良近似** (best apploximation) であるとは，有理数 $\frac{s}{t} \neq \frac{p}{q}$ に対して $t \leq q$ ならば

$$D_\omega\left(\frac{s}{t}\right) > D_\omega\left(\frac{p}{q}\right)$$

が成り立つときをいう．

すなわち分母が q 以下の分数の中で D_ω の値が最小になるときに $\frac{p}{q}$ は最良近似というのである．以上の準備もとに，収束分数の D_ω を用いた特徴付けが得られる．

定理 2.9 (収束分数の特徴付け)**.** 有理数 $\frac{p}{q}$ に対して次は同値：

(1) $\frac{p}{q}$ は ω の収束分数．

(2) $\frac{p}{q}$ は ω の最良近似．

証明. (1) ⇒ (2): これは定理 2.7 より明らか．

(2) ⇒ (1): $\frac{p}{q}$ が最良近似分数であるとする．いま ω の収束分数列 $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ を取り，$q_n \leq q < q_{n+1}$ を満たす n を固定する．このとき $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ を示したい．そこで $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ として矛盾を導こう．まず定理 2.7 を用いると，$\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ と $q < q_{n+1}$ より $D_\omega(\frac{p}{q}) > D_\omega(\frac{p_n}{q_n}) \quad \cdots (*)$ が成り立つ．一方で $\frac{p}{q}$ が最良近似分数であることから，$\frac{p_n}{q_n} \neq \frac{p}{q}$ と $q_n \leq q$ より $D_\omega(\frac{p_n}{q_n}) > D_\omega(\frac{p}{q})$ が成り立つが，これは $(*)$ に矛盾する．以上より $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$, すなわち $\frac{p}{q}$ が収束分数であることがいえる． □

近さを測る指標（その２）$G_\omega\left(\frac{p}{q}\right)$

次に無理数 ω と有理数 $\frac{p}{q}$ に対して

$$G_\omega\left(\frac{p}{q}\right) = q^2\left|\omega - \frac{p}{q}\right|$$

という量を考えよう．これは

$$G_\omega\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{|\omega-\frac{p}{q}|}{C(\frac{p}{q})\text{ の直径}}$$

と書き直してみると，図形的な意味がみえてくる．いま，ω を通り x 軸に垂直な半直線

$$L_\omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=\omega,\, y\geq 0\}$$

を考えると，L_ω と $C(\frac{p}{q})$ が 2 点で交わる必要十分条件は $G_\omega(\frac{p}{q})<\frac{1}{2}$ となることである（図 2.12）．

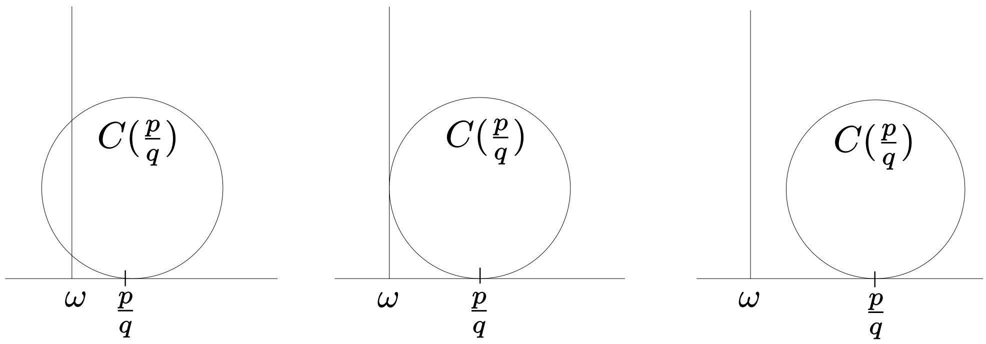

図 2.12: 左から $G_\omega(\frac{p}{q})<\frac{1}{2}$, $G_\omega(\frac{p}{q})=\frac{1}{2}$, $G_\omega(\frac{p}{q})>\frac{1}{2}$ の場合.

定理 2.10. 無理数 $\omega=[a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots]$ の収束分数を $\alpha_n=[a_0,a_1,\ldots,a_n]$ とするとき，任意の $n\geq 0$ に対して

$$\frac{1}{a_{n+1}+2}<G_\omega(\alpha_n)<\frac{1}{a_{n+1}}$$

が成り立つ.

証明. $\alpha_n=\frac{p_n}{q_n}$ とおく．定理 2.5 から

$$\frac{1}{q_{n+1}+q_n}<D_\omega(\alpha_n)<\frac{1}{q_{n+1}}$$

であったので

$$\frac{q_n}{q_{n+1}+q_n}<G_\omega(\alpha_n)<\frac{q_n}{q_{n+1}}$$

が成り立つ．ここで

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} > a_{n+1}q_n$$

と

$$q_{n+1} + q_n = (a_{n+1}+1)q_n + q_{n-1} < (a_{n+1}+2)q_n$$

より主張を得る． □

この定理から a_{n+1} がとても大きいとき $\alpha_n = [a_0, \ldots, a_n]$ は ω の大変よい近似になっていることがわかる．例えば $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, \ldots]$ に対する $\alpha_1 = [3, 7]$, $\alpha_3 = [3, 7, 15, 1]$ などである．実際 $G_\pi(\alpha_1) \approx 0.062$, $G_\pi(\alpha_3) \approx 0.0034$ となる．一方で $\alpha_2 = [3, 7, 15]$ は $a_3 = 1$ なのであまりよい近似ではない．実際 $G_\pi(\alpha_3) \approx 0.935$ と 1 に近い値になっている．

次の定理は，無理数 ω の収束分数は G_ω の値がそこそこ小さいことを保証する．

定理 2.11. 無理数 ω の収束分数列を $\{\alpha_n\}$ とするとき，任意の $n \geq 0$ に対して

(1) $G_\omega(\alpha_n) < 1$ が成り立つ．

(2) $G_\omega(\alpha_n) < \frac{1}{2}$ または $G_\omega(\alpha_{n+1}) < \frac{1}{2}$ が成り立つ．

証明. ω は α_n と α_{n+1} の間にあるので，どちらも明らかである． □

ここで，この定理 (1) の 1 というのは最良の数である．実際 ω やその収束分数 $\frac{p}{q}$ をうまく選ぶと $G_\omega(\frac{p}{q})$ の値はいくらでも 1 に近いようにすることができる．このことは図 2.10 を眺めながら，π の収束分数 $\alpha_2 = [3, 7, 15]$ の $G_\pi(\alpha_2)$ が 1 に近い値になることを観察すれば納得できるであろう．

定理 2.12 (ラグランジュ). ω は無理数とする．有理数 $\frac{p}{q}$ に対して $G_\omega(\frac{p}{q}) < \frac{1}{2}$ ならば $\frac{p}{q}$ は ω の収束分数である．

証明. ω の収束分数列を $\{\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}\}$ とする．ここで $\{q_n\}$ は単調増大列であるから，$q_n \leq q < q_{n+1}$ を満たすある $n \in \mathbb{N}$ が存在する．このとき $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ となることを示そう．いま $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ と仮定する．ここで $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ と仮定して一般性を失わない．このとき $\alpha_n < \omega < \alpha_{n+1}$ である．$q < q_{n+1}$ から $C(\frac{p}{q})$ の半径 $\frac{1}{2q^2}$

は $C(\alpha_{n+1})$ の半径 $\frac{1}{2q_{n+1}^2}$ より大きいので，フォードの円が互いに交わらないことを考えると，$\frac{p}{q}$ は線分 $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ の外にいなければならない．$G_\omega(\frac{p}{q}) < \frac{1}{2}$ を満たす可能性がある唯一の場合は $C(\frac{p}{q})$ が $C(\alpha_n)$ と $C(\alpha_{n+1})$ の両方に接する場合（すなわち $\alpha_n \oplus \frac{p}{q} = \alpha_{n+1}$ となる場合）であるが（図 2.13），この場合でも

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| > \left|\alpha_{n+1} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{2q^2}$$

がわかる．（2 番目の不等号は直感的には明らかで，具体的に計算で示すこともできる．等号が成り立つのは $q_n = q$ の場合である．）従って $C(\frac{p}{q})$ と L_ω が交わらないこと，すなわち $G_\omega(\frac{p}{q}) > \frac{1}{2}$ がわかる． □

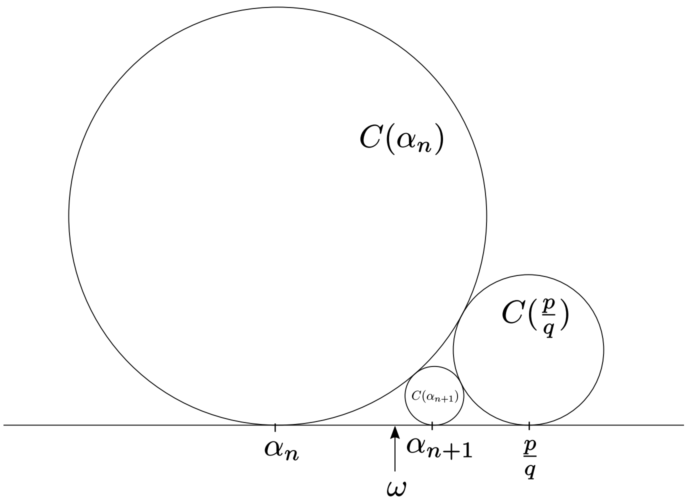

図 2.13:

問題 2.13 (ペル方程式). 自然数 D は平方数でないとする．方程式 $x^2 - Dy^2 = 1$ が自然数解 (X, Y) を持つとき $\frac{X}{Y}$ は無理数 $\sqrt{D}$ の収束分数であることを示せ．