

## 数学展望I

– 連分数, フォードの円, 双曲幾何 –  
平成27年度前期

糸 健太郎

# 目次

はじめに	2
<b>第1章 連分数</b>	<b>4</b>
1.1 連分数とは？	4
1.2 黄金比の連分数展開	8
1.3 無理数の連分数展開	11
1.4 収束分数列	18
1.5 2次の無理数	20
<b>第2章 フォードの円</b>	<b>29</b>
2.1 フォードの円	29
2.2 よい近似分数	37
2.3 フルビッツの定理	46
<b>第3章 双曲幾何</b>	<b>51</b>
3.1 円に関するの反転	51
3.2 双曲平面	56
3.3 双曲平面とフォードの円	62

# はじめに

この講義ノートは2015年度前期に開講した1年生向け講義「数学展望I – 連分数, フォードの円, 双曲幾何–」の講義が終了した後に, その内容を整理しつつ補足・拡充したものである. 従って講義の内容と全く同じではない. 特に講義では省略した細かな証明などもこのノートには書き加えた. 2015年度の新入生から高校では行列を習っていないので, 講義ではなるべく行列を出さないように心がけたが, 行列を用いると議論がクリアになる部分が多いので, このノートでは行列を用いた議論も(控えめながら)書き加えてある. また講義では全部で33題のレポート問題を出した. それらの多くはこのノートの内容のうち学生が自分で証明できそうな部分を取り出したものである. このノートの中にも幾つかの問題が含まれるが, これらは実際に講義中に出したレポート問題のごく一部である.

このノートの内容であるが, 連分数からスタートしてフォードの円, 双曲幾何と進む構成になっている. フォードの円は有理数の理論を視覚的に理解するのにとても役立ち, 今まで見えなかった有理数同士の新たなつながりが見えてくる. このフォードの円は有理数の連分数表示と大変相性がよいという特徴を持つ. その初等性や有用性に比べて, フォードの円を扱った日本語の文献はとても少ないので, このノートが有理数とフォードの円の関係を少しでも多くの人に伝える役に立てば嬉しい. さてフォードの円は20世紀初頭にFordという数学者によって導入されたのであるが, このFordは双曲幾何の専門家で, 実際, フォードの円は双曲幾何の世界で見て初めてその数学的な意味がはつきりする. このノートでは以上のような有理数–フォードの円–双曲幾何というつながりを説明する.

このノートは, 講義の終了後に内容を整理しておきたいと考えて書き始めたのであるが, 独立した読み物としては未だ完成には程遠い状態である. 特に章が進むにつれて完成度は低くなっている. 将来的にはこの講義ノートをよりまとまった形に仕上げたいと考えているので, もし間違いや改善点など気づいた

ことがあれば著者まで連絡して頂けたら有難い.

2015年10月 糸 健太郎

# 第1章 連分数

以下では次の記号を用いる：

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} && \text{自然数全体} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} && \text{整数全体} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} && \text{有理数全体} \\ \mathbb{R} &&& \text{実数全体} \\ \mathbb{C} &= \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\} && \text{複素数全体}\end{aligned}$$

## 1.1 連分数とは？

まず具体例を見てみよう。

$$5 + \frac{1}{3 + \frac{1}{17}} \quad \text{や} \quad 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$$

のようにはしご状の分数で表された数を連分数という。ただし分子には全て1が入る。与えられた連分数は、例えば

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} = \frac{43}{30}$$

のように有理数に変形することができる。逆に、与えられた有理数、例えば  $\frac{25}{9}$  は次のように連分数に変形できる：

$$\frac{25}{9} = 2 + \frac{7}{9} = 2 + \frac{1}{\frac{9}{7}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}$$

ここで連分数の正確な定義を述べておこう。

**定義 1.1.** 連分数とは

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} \quad (a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{N})$$

の形をした数のことである。この連分数を以下では簡単に

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$$

と表す。

注.  $a_0$  は負の整数であることも許す。このように定義することで、任意の有理数は連分数の形に表すことができる。

さて、最初に挙げた計算を図形的に理解してみよう。図 1.1 のように縦 9 横 25 の長方形を用意する。このとき  $\frac{25}{9}$  を連分数に直す計算は次のような操作に対応する：まず一辺が 9 の正方形を取れるだけ取り、次に残った長方形から一辺が 7 の正方形を取れるだけ取り、 $\dots$  という操作を繰り返す。図 1.2 を参考に  $\frac{43}{30}$  についても理解してほしい。このように正の有理数を連分数の形に直す計算は、長方形から正方形を取っていく操作で理解できる。

ここまでは有理数の連分数展開を考えたが、では無理数を連分数に表そうとするとどうなるだろうか？例として  $\sqrt{2}$  の場合を考えて見よう。  $1 < \sqrt{2} < 2$  に



に注意すれば

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}}} = [1, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

となることがわかる.

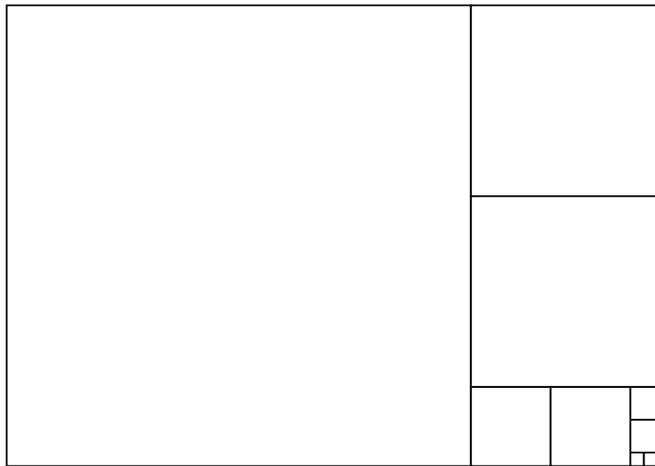


図 1.3: 縦横比が  $\sqrt{2}$  の長方形

**問題 1.2.** 有理数の列  $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$  を  $a_n = [1, \overbrace{2, 2, \dots, 2}^n]$  と定めるとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \sqrt{2}$$

を示せ. (ヒント:  $\beta_n = 1 + a_n = [2, \overbrace{2, \dots, 2}^{n+1}]$  と置くとき  $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1 + \sqrt{2}$  を示せばよい.  $\beta_n$  の漸化式を考えよ.)

**問題 1.3.**  $\sqrt{3}$  と  $\sqrt{7}$  の連分数展開を求めよ.

## 1.2 黄金比の連分数展開

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}} = [1, 2, 2, \dots]$$

であった。では

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots}}} = [1, 1, 1, \dots]$$

となる  $x$  はどのような数だろうか？ 連分数の形から  $x$  は  $x = 1 + \frac{1}{x}$  を満たすことがわかる。この方程式は  $x^2 - x - 1 = 0$  と書き直せて、その解は  $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  となる。ここで求める  $x$  は正であるので  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  を得る。この値  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  は**黄金比**と呼ばれる。以下では黄金比を

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

と表す。

黄金比  $\tau$  の無限連分数展開を途中で打ち切ったものを  $\alpha_n = \overbrace{[1, 1, \dots, 1]}^{n+1}$  を定めると

$$\alpha_0 = \frac{1}{1}, \quad \alpha_1 = \frac{2}{1}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{5}{3}, \quad \alpha_4 = \frac{8}{5}, \quad \dots$$

のようになる。ここで  $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}$  (既約分数表示) と表すとき、数列  $\{p_n\}, \{q_n\}$  の一般項がどのように表されるかを考えたい。いま

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \alpha_{n+1} = 1 + \frac{1}{\alpha_n} = 1 + \frac{1}{\frac{p_n}{q_n}} = \frac{p_n + q_n}{p_n}$$



となるので  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$  の計算ができればよい。この計算は1年生の線形代数で習うが、答のみを書くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \tau^{n+1} - (\tau')^{n+1} & \tau^n - (\tau')^n \\ \tau^n - (\tau')^n & \tau^{n-1} - (\tau')^{n-1} \end{pmatrix}$$

となる。これより数列  $\{p_n\}, \{q_n\}$  の一般項が計算できるのである。

さて、上と同様の考察で

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+2}$$

がわかる。ただし  $\begin{pmatrix} p_1 & p_0 \\ q_1 & q_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2$  を用いた。このことから次の重要な性質が得られる。

**補題 1.4.** 上の数列  $\{p_n\}, \{q_n\}$  に対して  $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$  が任意の  $n \geq 0$  に対して成り立つ。

証明. 2つの正方行列  $A, B$  に対して  $\det(AB) = \det A \det B$  が成り立つので

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = \det \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \left( \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{n+2} = (-1)^{n+2} = (-1)^n.$$

□

**定理 1.5.** 上の数列  $\{p_n\}, \{q_n\}$  に対して平面上の点  $(p_n, q_n)$  は曲線  $x^2 - xy - y^2 = (-1)^{n+1}$  上にある (図 1.5 参照)。

証明.  $p_{n+1} = p_n + q_n, q_{n+1} = p_n$  を用いると、上の補題で得た式  $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$  は  $(p_n)^2 - p_nq_n - (q_n)^2 = (-1)^{n+1}$  となる。□

曲線  $x^2 - xy - y^2 = \pm 1$  の漸近線は  $y = \frac{1}{\tau}x$  と  $y = -\tau x$  である。点  $(p_n, q_n)$  がどんどん直線  $y = \frac{1}{\tau}x$  に近づいていくことは  $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \tau (n \rightarrow \infty)$  に対応している。

**問題 1.6.** 上と同様のことを  $\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots]$  で考えてみよ。すなわち  $\alpha_n = [1, \overbrace{2, \dots, 2}^n, 2]$  とおき、 $\alpha_n$  の既約分数表示を  $\frac{p_n}{q_n}$  とするとき  $\{p_n\}, \{q_n\}$  の一般項を求めよ。また点  $(p_n, q_n)$  はどのような曲線上にあるか？

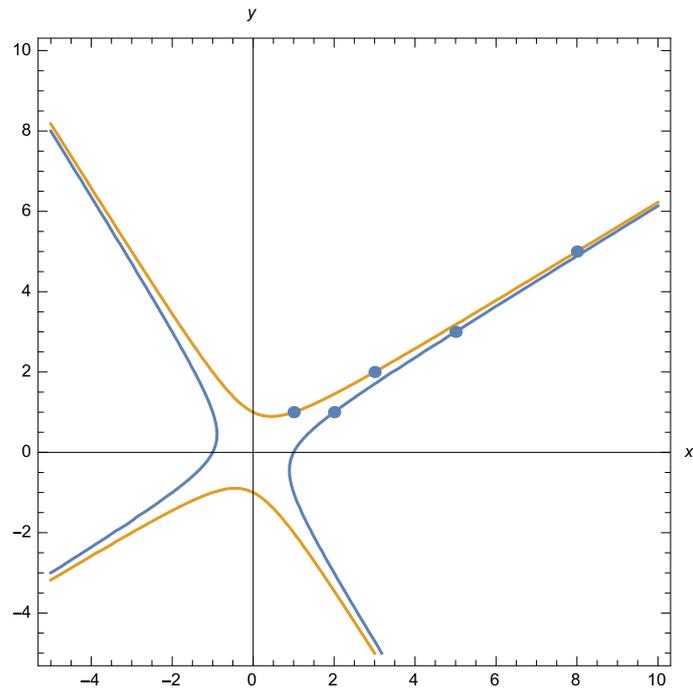


図 1.5: 曲線  $x^2 - xy - y^2 = 1$  (青) と  $x^2 - xy - y^2 = -1$  (オレンジ) および点  $(p_n, q_n)$  ( $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ).

### 1.3 無理数の連分数展開

ここでは一般の無理数  $\omega$  を連分数で表すことを考えよう。まず記号を準備しておく。今までの連分数展開の書き方を拡張して任意の実数  $t$  に対して

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\ddots \frac{1}{a_n + \frac{1}{t}}}}$$

$(a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N})$

のことも  $[a_0, \dots, a_n, t]$  と表すことにする. このとき  $[a_0, \dots, a_n, t]$  は  $t$  の関数とみることができる. このことは

$$[2, 3, 1, t] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{t}}} = \frac{9t + 7}{4t + 3}$$

のように書き直すとわかりやすい. また同様に考えれば, 任意の  $[a_0, \dots, a_n, t]$  はある整数  $p, q, r, s$  を用いて  $\frac{pt+q}{rt+s}$  の形にかけることもわかる.

では無理数  $\omega$  の連分数展開に戻ろう. まず  $\omega$  の整数部分を  $a_0$ , 小数部分を  $r_1$  とおく:

$$\omega = a_0 + r_1 \quad (a_0 \in \mathbb{Z}, 0 < r_1 < 1).$$

次に  $\omega_1 = \frac{1}{r_1}$  とおくと  $\omega_1 > 1$  であるので,  $\omega$  のときと同様にして

$$\omega_1 = a_1 + r_2 \quad (a_1 \in \mathbb{N}, 0 < r_2 < 1)$$

と書ける. ここで再び  $\omega_2 = \frac{1}{r_2}$  とおく. ここまでのことをまとめると

$$\omega = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\omega_2}} = [a_0, a_1, \omega_2]$$

となる. 以下同様にして

$$\omega_n = a_n + \frac{1}{\omega_{n+1}} \quad (a_n \in \mathbb{N}, \omega_{n+1} > 1)$$

となるように  $\omega_n$  から  $a_n$  と  $\omega_{n+1}$  を定めることで, 数列  $\{a_n\}, \{\omega_n\}$  を得る. このとき

$$\omega = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \omega_n]$$

が成り立つ. また

$$\omega = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$$

を  $\omega$  の**連分数展開**という. 無理数の連分数展開は必然的に無限に続くことに注意しよう. 実際, 有限で終わったらそれは有理数に書き直せるからである.

ここで幾つかの無理数の連分数展開を紹介しよう. ただし, 連分数の係数が途中から繰り返しになる場合, 例えば  $[5, 3, 1, 7, 3, 1, 7, 3, 1, 7, \dots]$ などは  $[5, \overline{3, 1, 7}]$ のように繰り返しの部分に線を引いて表す.

$$(1) \sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, \dots] = [1, \overline{2}]$$

$$(2) \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, \dots] = [\overline{1}]$$

$$(3) \sqrt{22} = [4, \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}]$$

$$(4) 2^{1/3} = [1, 3, 1, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 8, 1, 14, 1, 10, 2, 1, 4, 12, 2, 3, \dots]$$

$$(5) e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1, 1, \dots]$$

$$(6) \pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, \dots]$$

後ほど、連分数が途中から繰り返しになる必要十分条件は整数係数2次多項式の解となることを示す。eは繰り返しにはならないが規則性があることが見て取れる。一方で $2^{1/3}$ や $\pi$ にはそのような規則性は見当たらない。

参考までに縦横比 $\pi$ の長方形の図を載せる。292という数がこの図のどこに現れるかを考えてみよ。

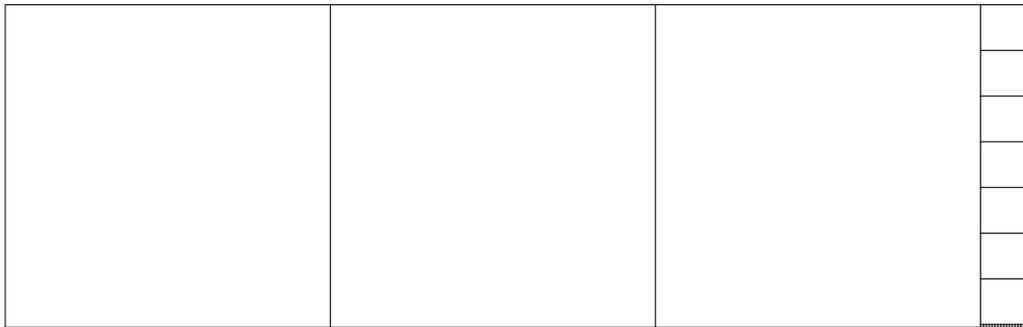


図 1.6: 縦横比  $\pi$  の長方形

**定義 1.7** (収束分数). 無理数  $\omega$  の連分数展開が  $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  であるとする。このとき連分数を途中で打ち切った有理数

$$\alpha_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$$

を  $\omega$  の ( $n$  番目の) **収束分数** とよぶ。また数列  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  を  $\omega$  の **収束分数列** とよぶ。

ここで、無理数 $\omega$ に収束する勝手な有理数の列を収束分数列とよぶわけではないことに注意する。上のような、連分数展開から得られる由緒正しい分数列を収束分数列とよぶのである。

以下では無理数 $\omega$ の収束分数列 $\{\alpha_n\}$ について、その名が示すとおり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \omega$$

が成り立つことを示す (定理 1.13)。そのために、まず $\alpha_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ の既約分数表示 $\frac{p_n}{q_n}$ に現れる $p_n, q_n$ を係数 $a_0, a_1, \dots, a_n$ から求める方法を述べる。それが次の定理 1.8 である。証明の都合により、まず天下りの的に $p_n, q_n$ を定めて、そのときこの $\frac{p_n}{q_n}$ が $\alpha_n$ の既約分数表示になるという形で定理の主張を述べる。

**定理 1.8.** 無理数 $\omega = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$ に対して数列 $\{p_n\}_{n=-1}^{\infty}, \{q_n\}_{n=-1}^{\infty}$ を

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

のように定めると任意の $n \geq 0$ に対して $(p_n, q_n)$ の最大公約数は1で

$$[a_0, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

が成り立つ。

この定理の証明のために次の補題 1.9 と補題 1.10 を準備する。

**補題 1.9.** 定理 1.8 の記号のもとに、任意の $n \geq 0$ と任意の実数 $t$ に対して

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, t] = \frac{p_n t + p_{n-1}}{q_n t + q_{n-1}} \quad (n \geq 0)$$

が成り立つ。

証明.  $n$ に関する帰納法で示す。 $n = 0$ のとき

$$[a_0, t] = a_0 + \frac{1}{t} = \frac{a_0 t + 1}{t} = \frac{p_0 t + p_{-1}}{q_0 t + q_{-1}}$$

となり成立する.  $n$  に対して成り立つと仮定すると,  $n+1$  のときも

$$\begin{aligned}
 [a_0, \dots, a_n, a_{n+1}, t] &= \left[ a_0, \dots, a_n, a_{n+1} + \frac{1}{t} \right] \\
 &= \frac{p_n \left( a_{n+1} + \frac{1}{t} \right) + p_{n-1}}{q_n \left( a_{n+1} + \frac{1}{t} \right) + q_{n-1}} \\
 &= \frac{(p_n a_{n+1} + p_{n-1})t + p_n}{(q_n a_{n+1} + q_{n-1})t + q_n} \\
 &= \frac{p_{n+1}t + p_n}{q_{n+1}t + q_n}
 \end{aligned}$$

で成り立つ. □

**補題 1.10.** 定理の記号のもとに,  $n \geq 0$  に対して次が成り立つ:

$$(1) \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(2) p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n+1}.$$

証明. (1)

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(2) は (1) の両辺の判別式を取ればよい. □

定理 1.8 の証明. 補題 1.9 で, 特に  $t = a_n$  とすると

$$\alpha_n = [a_0, \dots, a_{n-1}, a_n] = \frac{p_{n-1} a_n + p_{n-2}}{q_{n-1} a_n + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$$

が成り立つ. また, 補題 1.10 (2) から, 特に  $(p_n, q_n)$  最大公約数は 1 であることが分かるので  $\frac{p_n}{q_n}$  は既約分数である. □

### 定理 1.8 の別証明

行列を用いると、定理 1.8 に対して見通しのよい証明を与えることができる。この証明のメリットは数列  $\{p_n\}$ ,  $\{q_n\}$  の漸化式を天下りの与えなくて良いという点である。そのような形で定理 1.8 の主張を書き直し、証明を与えよう。

**定理 1.11** (定理 1.8 の言い換え). 無理数  $\omega = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  に対してその収束分数  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  の既約分数表示を  $\frac{p_n}{q_n}$  とするとき、数列  $\{p_n\}_{n=-1}^{\infty}$ ,  $\{q_n\}_{n=-1}^{\infty}$  は次の漸化式を満たす：

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

証明. 行列  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  と実数  $t$  に対して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} t = \frac{at + b}{ct + d}$$

と定義する。このとき 2 つの行列  $M, N$  に対して  $M(Nt) = (MN)t$  が成り立つことに注意する。この記号のもとで

$$a_i + \frac{1}{t} = \frac{a_i t + 1}{t} = \begin{pmatrix} a_i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t$$

と書けることを用いると

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, t] = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t$$

が任意の実数  $t$  に対して成り立つことがわかる。ここで

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, t] = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} t = \frac{A_n t + B_n}{C_n t + D_n}$$

が成り立つ。ここで  $t \rightarrow \infty$  とすると、右辺は  $\frac{A_n}{C_n}$  に収束し、左辺は

$$[a_0, a_1, \dots, a_n, t] = \left[ a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{t} \right]$$

と書き直すことで  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  に収束することがわかる。従って

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = \frac{A_n}{C_n}$$

を得る。ここで  $[a_0, a_1, \dots, a_n]$  の既約分数表示を  $\frac{p_n}{q_n}$  としていたので

$$\frac{A_n}{C_n} = \frac{p_n}{q_n}$$

となる。さらに補題 1.10 (2) と同じ議論で  $A_n D_n - B_n C_n = \pm 1$  を得て、これより  $(A_n, D_n)$  の最大公約は 1 となるので

$$A_n = p_n, \quad C_n = q_n$$

が分かる。一方で

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n A_{n-1} + B_{n-1} & A_{n-1} \\ a_n C_{n-1} + D_{n-1} & C_{n-1} \end{pmatrix}$$

が成り立つので、両端の行列の 2 列目を見比べて

$$B_n = A_{n-1} = p_{n-1}, \quad D_n = C_{n-1} = q_{n-1}$$

を得る。次に 1 行目を見比べることで

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

を得る。 □

## 1.4 収束分数列

無理数  $\omega$  の連分数展開を  $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  とする.  $\omega$  の  $n$  次収束分数  $\alpha_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  の既約分数表示を  $\frac{p_n}{q_n}$  とするとき, 定理 1.8 から数列  $\{p_n\}, \{q_n\}$  は

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

という漸化式で定まるのであった.

**定理 1.12.** 上の記号のもとに,  $n \geq 0$  に対して次が成り立つ:

- (1)  $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{(-1)^n}{q_{n+1}q_n}$ ,
- (2)  $\frac{1}{(q_{n+1} + q_n)q_n} < |\omega - \alpha_n| < \frac{1}{q_{n+1}q_n}$ .
- (3)  $|\omega - \alpha_{n+1}| < |\omega - \alpha_n|$

証明. (1)  $n \geq 0$  に対して

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}}{q_{n+1}q_n} = \frac{(-1)^n}{q_{n+1}q_n}.$$

(2)  $\omega = [a_0, \dots, a_n, \omega_{n+1}]$  に対して補題 1.9 を適用することで

$$\omega - \alpha_n = \frac{p_n\omega_{n+1} + p_{n-1}}{q_n\omega_{n+1} + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{-(p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n)}{(q_n\omega_{n+1} + q_{n-1})q_n} = \frac{(-1)^n}{(q_n\omega_{n+1} + q_{n-1})q_n}$$

が成り立つ. ここで  $a_{n+1} < \omega_{n+1} < a_{n+1} + 1$  と  $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$  より

$$q_{n+1} < q_n\omega_{n+1} + q_{n-1} < q_{n+1} + q_n$$

が成り立つので

$$\frac{1}{(q_{n+1} + q_n)q_n} < \left| \omega - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_{n+1}q_n}$$

を得る.

(3) (2) より

$$|\omega - \alpha_{n+1}| < \frac{1}{q_{n+2}q_{n+1}}, \quad \frac{1}{(q_{n+1} + q_n)q_n} < |\omega - \alpha_n|$$

が成り立つので

$$\frac{1}{q_{n+2}q_{n+1}} < \frac{1}{(q_{n+1} + q_n)q_n}$$

すなわち  $q_{n+2}q_{n+1} > (q_{n+1} + q_n)q_n$  がいえるとよい. この不等式は  $q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n \geq q_{n+1} + q_n$  と  $q_{n+1} > q_n$  の辺々を掛け合わせることで得られる.  $\square$

**定理 1.13.** 無理数  $\omega = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  に対して  $\alpha_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  とおくと  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \omega$  が成り立つ.

証明. ここで

$$q_n - q_{n-1} = (a_n - 1)q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-2} > 0$$

より  $q_n$  は狭義単調増大列である. 従って上の定理 (2) から

$$\alpha_n = \frac{p_n}{q_n} \rightarrow \omega \quad (n \rightarrow \infty)$$

が分かる.  $\square$

さらに

$$\alpha_1 < \alpha_3 < \alpha_5 < \dots < \omega < \dots < \alpha_6 < \alpha_4 < \alpha_2$$

が成り立つ.

## 1.5 2次の無理数

無理数  $\omega$  は, 整数係数 2 次方程式

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \quad (A, B, C \in \mathbb{Z})$$

の解になるとき **2次の無理数**であるという. この方程式の  $\omega$  と異なる解を  $\omega$  の **共役解** といい  $\omega'$  と表す. 例えば  $\sqrt{2}$  の共役解は  $-\sqrt{2}$  で,  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  の共役解は  $\tau' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  である. 次の補題から, この共役解は  $\omega$  に対して一意的に定まることが分かる.

**補題 1.14.** 2 次の無理数  $\omega$  を解に持つ整数係数 2 次方程式  $Ax^2 + Bx + C = 0$  は  $A > 0$  かつ  $(A, B, C)$  の最大公約数は 1 という条件の下に一意的に定まる. 特に  $\omega$  の共役解  $\omega'$  は  $\omega$  に対して一意的に定まる.

**問題 1.15.** この補題を証明せよ.

**問題 1.16.**  $\omega$  が 2 次の無理数であるとき  $\omega \neq \omega'$  であることを示せ.

**補題 1.17.**  $\omega$  は 2 次の無理数とする. 実数  $\eta$  に対して

$$\omega = \frac{a\eta + b}{c\eta + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc \neq 0)$$

が成り立つとき,  $\eta$  も 2 次の無理数で

$$\omega' = \frac{a\eta' + b}{c\eta' + d}$$

が成り立つ.

証明.  $\omega$  が  $Ax^2 + Bx + C = 0$  ( $A, B, C \in \mathbb{Z}$ ) の解とする. これに  $\omega = \frac{a\eta+b}{c\eta+d}$  を代入した式

$$A \left( \frac{a\eta + b}{c\eta + d} \right)^2 + B \left( \frac{a\eta + b}{c\eta + d} \right) + C = 0$$

は  $D\eta^2 + E\eta + F = 0$  ( $D, E, F \in \mathbb{Z}$ ) の形の式に変形できる. 従って  $\eta$  は 2 次の無理数で,  $D(\eta')^2 + E\eta' + F = 0$  も成り立つ. ここで先ほどの変形を逆にたどることで

$$A \left( \frac{a\eta' + b}{c\eta' + d} \right)^2 + B \left( \frac{a\eta' + b}{c\eta' + d} \right) + C = 0$$

を得る. 従って  $\frac{a\eta'+b}{c\eta'+d}$  が  $Ax^2 + Bx + C = 0$  の解となることがわかる. いま上の問題から  $\eta \neq \eta'$  であるので  $\omega = \frac{a\eta+b}{c\eta+d} \neq \frac{a\eta'+b}{c\eta'+d}$  がわかる (ここに  $ad - bc \neq 0$  という条件を用いる). 従って  $\omega' = \frac{a\eta'+b}{c\eta'+d}$  がいえる.  $\square$

**系 1.18.** 無理数  $\omega = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots]$  に対して  $\omega = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \omega_n]$  と表すとき  $\omega' = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \omega'_n]$  が成り立つ.

証明. 1.3 節冒頭で述べたことから, ある整数  $p, q, r, s$  が存在して

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, t] = \frac{pt + q}{rt + s}$$

が任意の実数  $t$  に対して成り立つ. 従って

$$\omega = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \omega_n] = \frac{p\omega_n + q}{r\omega_n + s}$$

に補題 1.17 を適用することで

$$\omega' = \frac{p\omega'_n + q}{r\omega'_n + s} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \omega'_n]$$

を得る.  $\square$

## ラグランジュの定理

次の定理は  $\omega$  の連分数展開が途中から繰り返しとなる必要十分条件は  $\omega$  が 2 次の無理数であることを主張する.

**定理 1.19** (ラグランジュ). 無理数  $\omega$  に対して以下は同値:

- (1)  $\omega = [a_0, \dots, a_m, \overline{a_{m+1}, \dots, a_n}]$  となる. すなわち連分数展開が途中から循環する.
- (2)  $\omega$  は 2 次の無理数.

証明. (1)  $\Rightarrow$  (2):  $\omega_{m+1} = [\overline{a_{m+1}, \dots, a_n}]$  とおくと

$$\omega = [a_0, \dots, a_m, \overline{a_{m+1}, \dots, a_n}] = [a_0, \dots, a_m, \omega_{m+1}]$$

であり、補題 1.9 より

$$\omega = \frac{p_m \omega_{m+1} + p_{m-1}}{q_m \omega_{n+1} + q_{m-1}}$$

が成り立つ (ただし  $\omega$  の  $m$  次収束分数を  $\frac{p_m}{q_m}$  と表す). ここで補題 1.10 より  $p_m q_{m-1} - p_{m-1} q_m = \pm 1$  であることを用いると,  $\omega_{m+1}$  を  $\omega$  を用いて表すことができる

$$\omega_{m+1} = \frac{q_{m-1} \omega - p_{m-1}}{-q_m \omega + p_m} \quad (*)$$

となる.

一方で

$$\omega_{m+1} = [\overline{a_{m+1}, \dots, a_n}] = [a_{m+1}, \dots, a_n, \omega_{m+1}]$$

なので, ある整数  $p, q, r, s$  が存在して

$$\omega_{m+1} = \frac{p \omega_{n+1} + q}{r \omega_{m+1} + s} \quad (**)$$

と表せる. 従って (\*) を (\*\*) に代入して整理することで,  $\omega$  に関する整数係数 2 次方程式を得る. よって  $\omega$  は 2 次の無理数である.

(2)  $\Rightarrow$  (1):  $\omega$  が  $Ax^2 + Bx + C = 0$  ( $A, B, C \in \mathbb{Z}$ ) の解とする.  $\omega = [a_0, \dots, a_{n-1}, \omega_n]$  とおくと, 以下の目標は, ある  $m, l \in \mathbb{N}$  ( $m < l$ ) が存在して  $\omega_m = \omega_l$  が成り立つことを示すことである. これがいえると

$$\omega_m = [a_m, \dots, a_{l-1}, \omega_l] = [a_m, \dots, a_{l-1}, \omega_m] = [\overline{a_m, \dots, a_{l-1}}]$$

から  $\omega = [a_0, \dots, a_{m-1}, \overline{a_m, \dots, a_{l-1}}]$  がいえるので証明が終わる.

さて

$$\omega = [a_0, \dots, a_n, \omega_{n+1}] = \frac{p_n \omega_{n+1} + p_{n-1}}{q_n \omega_{n+1} + q_{n-1}}$$

を  $A\omega^2 + B\omega + C = 0$  に代入して整理すると

$$\begin{cases} A_{n+1} = Ap_n^2 + Bp_n q_n + Cq_n^2 \\ B_{n+1} = 2Ap_n p_{n-1} + B(p_n q_{n-1} + p_{n-1} q_n) + 2Cq_n q_{n-1} \\ C_{n+1} = Ap_{n-1}^2 + Bp_{n-1} q_{n-1} + Cq_{n-1}^2 (= A_n) \end{cases}$$

とおくことで

$$A_{n+1} \omega_{n+1}^2 + B_{n+1} \omega_{n+1} + C_{n+1} = 0$$

を得る. また, 任意の  $n$  に対して

$$B_{n+1}^2 - 4A_{n+1}C_{n+1} = B^2 - 4AC$$

が成り立つことも計算によって確かめることができる. いま上式の一行目の式を  $q_n^2$  で割った式

$$\frac{A_{n+1}}{q_n^2} = A \left( \frac{p_n}{q_n} \right)^2 + B \frac{p_n}{q_n} + C$$

と  $0 = A\omega^2 + B\omega + C$  の差を考えて

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}}{q_n^2} &= A \left( \left( \frac{p_n}{q_n} \right)^2 - \omega^2 \right) + B \left( \frac{p_n}{q_n} - \omega \right) \\ &= \left( \frac{p_n}{q_n} - \omega \right) \left( A \left( \frac{p_n}{q_n} + \omega \right) + B \right) \end{aligned}$$

を得る. ここで  $\left| \omega - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$  を用いると

$$\begin{aligned} |A_{n+1}| &< \left| A \left( \frac{p_n}{q_n} + \omega \right) + B \right| \\ &\leq |A| \left| \frac{p_n}{q_n} + \omega \right| + |B| \\ &< |A|(2|\omega| + 1) + |B| \end{aligned}$$

を得る. 従って  $A_{n+1}$  は有界であることが分かった.  $C_{n+1} = A_n$  であったから  $C_{n+1}$  も有界である. また  $B_{n+1}^2 - 4A_{n+1}C_{n+1} = B^2 - 4AC$  より  $B_{n+1}$  が有界となることもわかる.

以上より  $\omega_n$  が満たす方程式  $A_n\omega_n^2 + B_n\omega_n + C_n = 0$  に現れる係数  $A_n, B_n, C_n$  は有限個なので方程式も有限個, 従ってその解  $\omega_n$  も有限個であることがわかる. よって, ある  $m, l \in \mathbb{N}$  ( $m < l$ ) が存在して  $\omega_m = \omega_l$  となるので証明が終わる.  $\square$

## ガロアの定理

次に2次の無理数  $\omega$  の連分数展開が最初から循環する場合を考えよう. すなわち  $\omega = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}]$  となる場合である. 一般の連分数では  $a_0$  は負の整数となることもあったが, この場合は  $a_{n+1} = a_0$  となるため  $a_0$  は自然数であり, 特に  $\omega > 1$  となることに注意する.

**定理 1.20** (ガロア). 無理数  $\omega$  に対して次は同値:

- (1)  $\omega = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}]$  となる. すなわち  $\omega$  の連分数展開は初項から循環する.  
 (2)  $\omega$  は 2 次の無理数で  $\omega > 1$  かつ  $-1 < \omega' < 0$  が成り立つ.

証明. (1)  $\Rightarrow$  (2):  $\omega = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}] = [a_0, a_1, \dots, a_n, \omega]$  であるので, 補題 1.9 より

$$\omega = \frac{p_n \omega + p_{n-1}}{q_n \omega + q_{n-1}}$$

が成り立つ. よって  $\omega$  を解に持つ 2 次多項式は

$$f(x) = q_n x^2 + (q_{n-1} - p_n)x - p_{n-1}$$

となる. ここで  $f(-1) = q_n - q_{n-1} + p_n - p_{n-1} > 0$ ,  $f(0) = -p_{n-1} < 0$  より  $f(x) = 0$  は  $-1 < x < 0$  の間に解を持つ. 一方で  $\omega > a_0 \geq 1$  は  $f(x) = 0$  の解であるので  $-1 < \omega' < 0$  がいえる.

(2)  $\Leftarrow$  (1):  $\omega = [a_0, \dots, a_{n-1}, \omega_n]$  とする. 最初に, 任意の  $n$  に対して  $\omega_n > 1$ ,  $-1 < \omega'_n < 0$  が成り立つことを帰納法で示そう.  $n = 0$  のとき  $\omega = \omega_0$  はこの条件を満たすので, ある  $n$  に対して  $\omega_n > 1$ ,  $-1 < \omega'_n < 0$  が成り立つ仮定して  $\omega_{n+1} > 1$ ,  $-1 < \omega'_{n+1} < 0$  を示せばよい. 実際  $\omega_n$  を解に持つ整数係数 2 次多項式を

$$f_n(x) = A_n x^2 + B_n x + C_n \quad (A_n > 0)$$

とする.  $\omega_{n+1}$  を解に持つ多項式は  $\omega_n = a_n + \frac{1}{\omega_{n+1}}$  を用いると

$$f_{n+1}(x) = (A_n a_n^2 + B_n a_n + C_n)x^2 + (2A_n a_n + B_n)x + A_n$$

となる. (実際  $f_{n+1}(x) = f_n(a_n + \frac{1}{x})x^2$  である.) ここで  $f_{n+1}(x)$  の  $x^2$  の係数は  $A_n a_n^2 + B_n a_n + C_n = f_n(a_n) < 0$  より負であることに注意する. また

$$f_{n+1}(-1) = f_n(a_n - 1) < 0, \quad f_{n+1}(0) = A_n > 0, \quad f_{n+1}(1) = f_n(a_n + 1) > 0$$

であるので  $\omega_{n+1} > 1$ ,  $-1 < \omega'_{n+1} < 0$  がいえる.

さて,

$$\omega_n = [a_n, \omega_{n+1}] = a_n + \frac{1}{\omega_{n+1}}$$

より

$$\omega'_n = [a_n, \omega'_{n+1}] = a_n + \frac{1}{\omega'_{n+1}}$$

が成り立つことが補題よりわかる. この式を

$$-\frac{1}{\omega'_{n+1}} = a_n + (-\omega'_n)$$

と書き直すと  $0 < -\omega'_n < 1$  から  $a_n = \left[-\frac{1}{\omega'_{n+1}}\right]$  がいえることに注意する.

いま  $\omega$  は 2 次の無理数であるから, ラグランジュの定理から  $\omega_m = \omega_n$  となる  $m, n$  ( $m < n$ ) が存在する. このとき  $\omega_{m-1} = \omega_{n-1}$  も成り立つ. 実際,  $\omega'_m = \omega'_n$  がいえるので, 上の注意から  $a_{m-1} = a_{n-1}$  がいえる. このとき  $\omega_{m-1} = a_{m-1} + \frac{1}{\omega'_m}$  と  $\omega_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\omega'_n}$  が等しいことが分かる.

この議論を繰り返すと  $\omega = \omega_0$  と  $\omega_{n-m}$  が等しいことが分かり

$$\omega = [a_0, \dots, a_{n-m-1}, \omega] = [\overline{a_0, \dots, a_{n-m-1}}]$$

がいえる. □

**定理 1.21 (ガロア).**  $\omega = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}]$  であるとき

$$-\frac{1}{\omega'} = [\overline{a_n, \dots, a_1, a_0}]$$

が成り立つ.

証明. まず例で説明しよう.  $\omega = [\overline{2, 3}]$  の場合を考える.

$$\omega = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\omega}} \iff \frac{1}{\omega - 2} = 3 + \frac{1}{\omega} \iff 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{-\frac{1}{\omega}}} = -\frac{1}{\omega}$$

より  $-\frac{1}{\omega} = [\overline{3, 2}]$  を得る. 一般の場合も同様に考えればよい.

行列を用いることで, この議論はより見通しがよくなる. 以下ではこの説明をしよう. 系 1.18 を用いると  $\omega = [a_0, \dots, a_n, \omega]$  より  $\omega' = [a_0, \dots, a_n, \omega']$  が成り立つ.

従って, 定理 1.11 の証明の中で導入した記号を用いると

$$\omega' = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega'$$

が成り立つ. ここで

$$\begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いると

$$\begin{aligned} \omega' &= \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdots \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \omega' \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \omega' \end{aligned}$$

を得る. これより

$$-\frac{1}{\omega'} = \begin{pmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ \omega' \end{pmatrix}$$

すなわち

$$-\frac{1}{\omega'} = [\overline{a_n, \dots, a_1, a_0}]$$

を得る. □

## 回文性

回文とは「新聞紙」や「竹藪焼けた」や「イタリアでもホモでありたい」のように上から読んでも下から読んでも同じである文のことをいう. ここでは $\omega$ の連分数展開の循環部分が回文的になる条件を考える.

**定理 1.22.** 無理数 $\omega$ に対して次は同値:

- (1)  $\omega = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n}]$  ( $a_0 = a_n, a_1 = a_{n-1}, \dots$ ) となる. すなわち $\omega$ の連分数展開は初項から循環して, その循環部分は回文的.
- (2)  $\omega$  は 2 次無理数で  $\omega > 1$  かつ  $\omega\omega' = -1$  が成り立つ.
- (3)  $\omega$  は  $Ax^2 - Bx - A = 0$  ( $A, B \in \mathbb{N}$ ) の形の 2 次方程式の解となる.

証明. (1)  $\Rightarrow$  (2): 初項から循環することから  $\omega = [\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}] > 1$  であり, また定理より  $-\frac{1}{\omega'} = [\overline{a_n, \dots, a_1, a_0}]$  が成り立つ. 従って回文性より  $\omega = -\frac{1}{\omega'}$  すなわち  $\omega\omega' = -1$  を得る.

(2)  $\Rightarrow$  (1): まず  $\omega > 1$  と  $\omega\omega' = -1$  より  $-1 < \omega' < 0$  である. 従って定理 1.20 より  $\omega$  の連分数展開は初項から循環する. また  $\omega = -\frac{1}{\omega'}$  なので, 定理より回文的であることがわかる.

(2)  $\Leftrightarrow$  (3) は容易に確認できる. □

幾つか例を挙げよう:

- $\omega$  が  $3x^2 - 2x - 3 = 0$  の解のとき  $\omega = [\overline{1, 2, 1}]$ .
- $\omega$  が  $7x^2 - 5x - 7 = 0$  の解のとき  $\omega = [\overline{1, 2, 2, 1}]$
- $\omega$  が  $2x^2 - 5x - 2 = 0$  の解のとき  $\omega = [\overline{2, 1, 5, 1, 2}]$

**定理 1.23.** 平方数ではない自然数  $D$  に対して

$$\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0}]$$

が成り立つ. さらに  $a_1, a_2, \dots, a_n$  の部分は回文的である.

証明.  $\sqrt{D} = [a_0, a_1, \dots]$  とする. このとき  $\sqrt{D}$  の整数部分は  $a_0$  である. いま  $\omega = a_0 + \sqrt{D}$  とおくと  $\omega' = a_0 - \sqrt{D}$  より  $\omega > 1$  かつ  $-1 < \omega' < 0$  が成り立つ. 従って  $\omega$  の連分数展開は初項から循環し,  $\omega$  の整数部分が  $2a_0$  であることより

$$\omega = [\overline{2a_0, a_1, \dots, a_n}]$$

と書ける.  $\omega = [2a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0}]$  と書き直すことで

$$\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_n, 2a_0}]$$

を得る.

次に回文性について示そう.  $\omega = [\overline{2a_0, a_1, \dots, a_n}]$  なので定理 2.21 より

$$-\frac{1}{\omega'} = [\overline{a_n, \dots, a_1, 2a_0}] = \left[ a_n, \dots, a_1, 2a_0, -\frac{1}{\omega'} \right] = [a_n, \dots, a_1, \omega]$$

を得る。ただし、2番目の等号には  $[2a_0, -\frac{1}{\omega'}] = 2a_0 - \omega' = \omega$  を用いた。一方  
 で  $\omega = [2a_0, a_1, \dots, a_n, \omega]$  より

$$\frac{1}{\omega - 2a_0} = [a_1, \dots, a_n, \omega]$$

が成り立つ。ここで  $\omega + \omega' = 2a_0$  より  $\frac{1}{\omega - 2a_0} = -\frac{1}{\omega'}$  であるので

$$-\frac{1}{\omega'} = [a_1, \dots, a_n, \omega]$$

を得る。以上より  $[a_n, \dots, a_1, \omega] = [a_1, \dots, a_n, \omega]$  が成り立つ。このとき両辺の  
 整数部分を見比べて  $a_n = a_1$  を得る。さらに両辺から  $a_n = a_1$  を引いて逆数を取  
 り、それぞれの整数部分を見比べることで  $a_{n-1} = a_2$  を得る。以下同様にし  
 て  $a_1, a_2, \dots, a_n$  の部分は回文的であることがわかった。  $\square$

幾つか例を挙げよう：

$$\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$$

$$\sqrt{31} = [5, \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}]$$

$$\sqrt{50} = [7, \overline{14}]$$

$$\sqrt{58} = [7, \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 14}]$$

$$\sqrt{72} = [8, \overline{2, 16}]$$

$$\sqrt{94} = [9, \overline{1, 2, 3, 1, 1, 5, 1, 8, 1, 5, 1, 1, 3, 2, 1, 18}]$$

**問題 1.24.**  $\omega = [n, \overline{2n}]$  となる数は何か？

## 第2章 フォードの円

この章では有理数を上半平面における円（フォードの円）に対応させてその関係を見る。フォードの円は L. R. Ford によって 20 世紀初等に導入された。フォードの円は連分数と大変相性がよく、これを用いることによって前章の連分数の理論を図形的に理解することができるようになる。Ford はフォードの円を用いてフルビッツの定理の幾何学的な別証明を得ている。この章の最後では Ford による解説文 [9] に従ってこの証明を紹介する。フォードの円は初等幾何のみで扱えるにもかかわらず、残念ながら日本語による解説はほとんど見当たらない。英語による解説は、Ford 自身の解説 [9] 以外では Bonahon による双曲幾何の教科書 [8] の 9 章がよい。

### 2.1 フォードの円

以下、有理数は全て規約分数表示であるとする。

有理数  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  に対して、中心が  $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$  で半径が  $\frac{1}{2q^2}$  である円を  $\frac{p}{q}$  に関するフォードの円といい  $C\left(\frac{p}{q}\right)$  と表す。

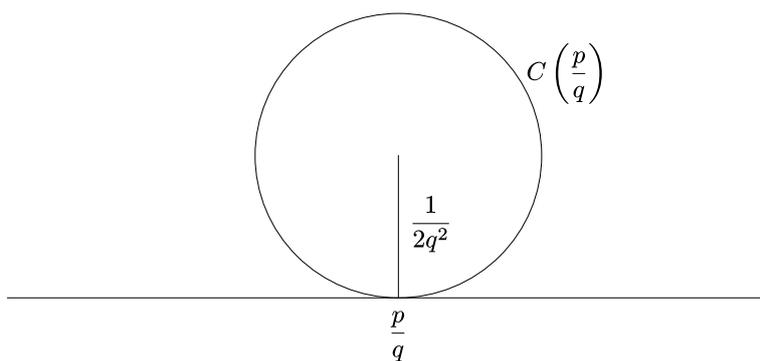


図 2.1: フォードの円  $C\left(\frac{p}{q}\right)$

**定理 2.1.** 異なる2つの有理数  $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$  に対して次が成り立つ：

- (1)  $C(\frac{p}{q})$  と  $C(\frac{r}{s})$  は接するか離れている（交わることはない）。
- (2)  $C(\frac{p}{q})$  と  $C(\frac{r}{s})$  が接する必要十分条件は  $ps - qr = \pm 1$  となることである。
- (3)  $C(\frac{p}{q})$  と  $C(\frac{r}{s})$  が接する場合、 $C(\frac{p+r}{q+s})$  は  $C(\frac{p}{q}), C(\frac{r}{s})$  の両方に接する（図 2.2 参照）。

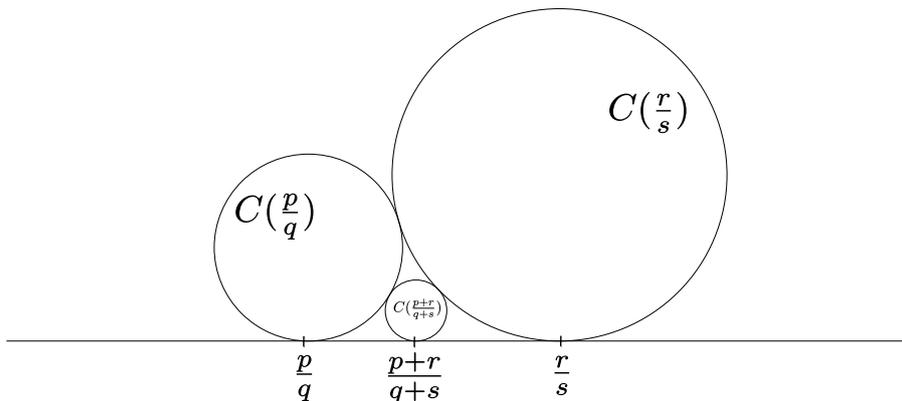


図 2.2:  $C(\frac{p+r}{q+s})$  は  $C(\frac{p}{q}), C(\frac{r}{s})$  の両方に接する。

**問題 2.2.** この定理を証明せよ。

**定義 2.3.** (1) 2つの有理数  $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$  が  $ps - qr = \pm 1$  を満たすとき、 $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$  は隣り合うという。

- (2) 2つの有理数  $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$  に対して  $\frac{p+r}{q+s}$  を  $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$  と書いて  $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$  のファレイ和と呼ぶ。

定理 2.1 (2) から  $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$  が隣り合う必要十分条件は  $C(\frac{p}{q})$  と  $C(\frac{r}{s})$  が接することである。また、このとき定理 2.2 (3) より  $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$  は  $\frac{p}{q}$  や  $\frac{r}{s}$  とそれぞれ隣り合うことがわかる。すなわち  $C(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s})$  は  $C(\frac{p}{q}), C(\frac{r}{s}), x$  軸の3つに接する円のうち、 $C(\frac{p}{q}), C(\frac{r}{s}), x$  軸に囲まれる領域に含まれる唯一のものとして特徴付けら

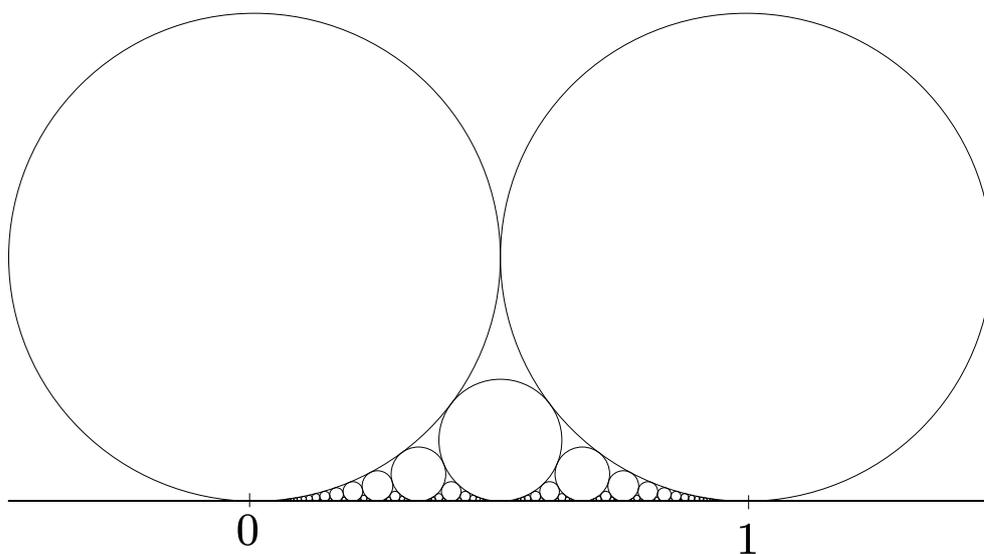


図 2.3: 区間  $[0,1]$  に含まれる有理数に対応するフォードの円

れる. 実は  $C(\frac{p}{q}), C(\frac{r}{s}), x$  軸の 3 つに接する円はもう 1 つ存在して, それは例えば  $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$  かつ  $q < s$  のときには  $C(\frac{r-p}{s-q})$  と一致する.

以下では  $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$  が隣り合うとき  $C(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s})$  のことを  $C(\frac{p}{q}) \oplus C(\frac{r}{s})$  と表すこともある.

定理 2.1 の性質を用いれば, 区間  $[0,1]$  に含まれる有理数に対応するフォードの円を,  $C(\frac{0}{1})$  と  $C(\frac{1}{1})$  からスタートして次々と描いていくことができる (図 2.3).

### 黄金比とフォードの円

黄金比  $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, \dots]$  に対して, その収束分数  $\alpha_n = \overbrace{[1, 1, \dots, 1]}^{n+1}$  の既約分数表示を  $\frac{p_n}{q_n}$  とするとき

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = 2 \\ q_1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_n = p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

が成り立つのであった. この漸化式から

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \oplus \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \quad (n \geq 2)$$

すなわち

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} \oplus \alpha_{n-2}$$

が成り立つことに注意する. 以下では  $C(\alpha_n)$  を  $C_n$  と書くことにすると,  $\alpha_0$  と  $\alpha_1$  が隣接する, すなわち  $C_0 = C(\alpha_0)$  と  $C_1 = C(\alpha_1)$  が接することから,

$$C_2 = C(\alpha_2) = C(\alpha_0 \oplus \alpha_1) = C(\alpha_0) \oplus C(\alpha_1) = C_0 \oplus C_1$$

を得る. 以下同様に  $C_n$  と  $C_{n+1}$  が接するので

$$C_{n+2} = C(\alpha_{n+2}) = C(\alpha_n \oplus \alpha_{n+1}) = C(\alpha_n) \oplus C(\alpha_{n+1}) = C_{n+1} \oplus C_n$$

が成り立つ. 従って  $C_0, C_1$  からスタートし, この隙間に収まる  $C_2$  を描き, 次に  $C_1$  と  $C_2$  の隙間に収まる  $C_3$  を描き,  $\dots$  という作業を続けることで  $\{C_n\}$  が作図できるのである (図 2.4).

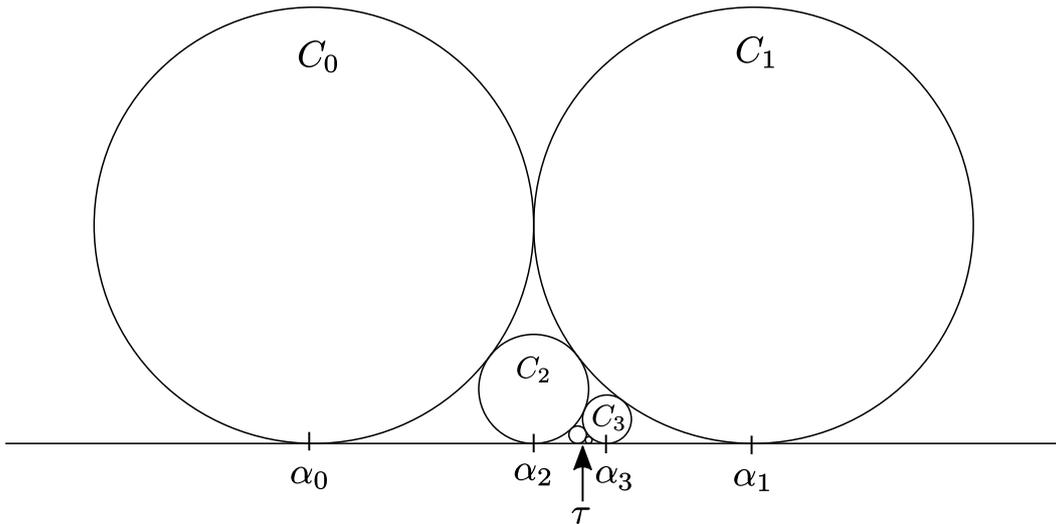


図 2.4:  $C_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ).

以下では便宜上, 無限大  $\infty$  も有理数の仲間に入れて考えると都合がよい. ここで  $\infty$  の既約分数表示は  $\frac{1}{0}$  であると約束する. そして  $\infty = \frac{1}{0}$  のフォードの円  $C(\frac{1}{0})$  を直線  $y = 1$  と約束する. このとき  $C(\frac{1}{0})$  は任意の整数  $k = \frac{k}{1}$  のフォードの円  $C(\frac{k}{1})$  と接しているため,  $\frac{1}{0}$  と  $\frac{k}{1}$  が隣り合っていることと整合性があり, 定理 2.1 は「有理数」  $\infty = \frac{1}{0}$  についても成り立つ. このことから  $C(\frac{1}{0})$  をこのように定義することは自然であることがわかる.

## 無理数とフォードの円

さて、無理数  $\omega$  の連分数展開を  $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  とするとき、 $\omega$  の収束分数  $\alpha_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  の既約分数表示  $\frac{p_n}{q_n}$  は

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 \\ q_{-1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \quad (n \geq 1)$$

によって定まるのであった。従って

$$\alpha_n = \alpha_{n-2} \oplus \overbrace{\alpha_{n-1} \oplus \dots \oplus \alpha_{n-1}}^{a_n}$$

が成り立つ。ここで  $C_n = C(\alpha_n)$  と書くことにすると  $\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}$  が隣り合うことから

$$C_n = C_{n-2} \oplus \overbrace{C_{n-1} \oplus \dots \oplus C_{n-1}}^{a_n}$$

が成り立つ。ただし、右辺の意味するところは、まず  $C_{n-2} \oplus C_{n-1}$  を考えて、次に  $(C_{n-2} \oplus C_{n-1}) \oplus C_{n-1}$  を考えて、 $\dots$  ということを  $a_n$  回繰り返すことを意味する。この操作を繰り返していくと  $C_n$  はどんどん小さくなっていき、その極限は  $\omega$  に収束する。以上のことから、整数  $a_0$  と自然数の列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  が与えられたとき、その連分数展開が  $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  となるような実数  $\omega$  を数直線上に作図する方法はわかった。

いま述べた作図法における  $\omega$  とフォードの円  $C_n = C(\alpha_n)$  の位置関係をよく観察すれば、逆に数直線上に  $\omega$  が作図されているときに、フォードの円を次々に作図していくことで、 $\omega$  の連分数展開の係数  $a_n$  や収束分数  $\alpha_n$  を知ることができる。それには次のようにすればよい。まず  $\omega$  の整数部分を  $a_0$  とし、 $\alpha_{-1} = \frac{1}{0}$ ,  $\alpha_0 = \frac{a_0}{1}$  とおく。そして  $C(\alpha_{-1}) = C(\frac{1}{0})$  と  $C(\alpha_0) = C(\frac{a_0}{1})$  を作図する。次に

$$C_{-1} \oplus C_0, \quad C_{-1} \oplus C_0 \oplus C_0, \quad C_{-1} \oplus C_0 \oplus C_0 \oplus C_0, \quad \dots$$

と作図していくと、これらフォードの円と  $x$  軸との接点

$$\alpha_{-1} \oplus \alpha_0, \quad \alpha_{-1} \oplus \alpha_0 \oplus \alpha_0, \quad \alpha_{-1} \oplus \alpha_0 \oplus \alpha_0 \oplus \alpha_0, \quad \dots$$

は減少していくが、この接点のうち  $\omega$  を通り過ぎる直前のものを  $\alpha_1$  として採用する。すなわち、整数  $a_1$  として

$$\alpha_{-1} \oplus \overbrace{\alpha_0 \oplus \dots \oplus \alpha_0}^{a_1+1} < \omega < \alpha_{-1} \oplus \overbrace{\alpha_0 \oplus \dots \oplus \alpha_0}^{a_1}$$

を満たすものを取り, このとき

$$\alpha_1 = \alpha_{-1} \oplus \overbrace{\alpha_0 \oplus \cdots \alpha_0}^{a_1}$$

と定めるのである (図 2.5).

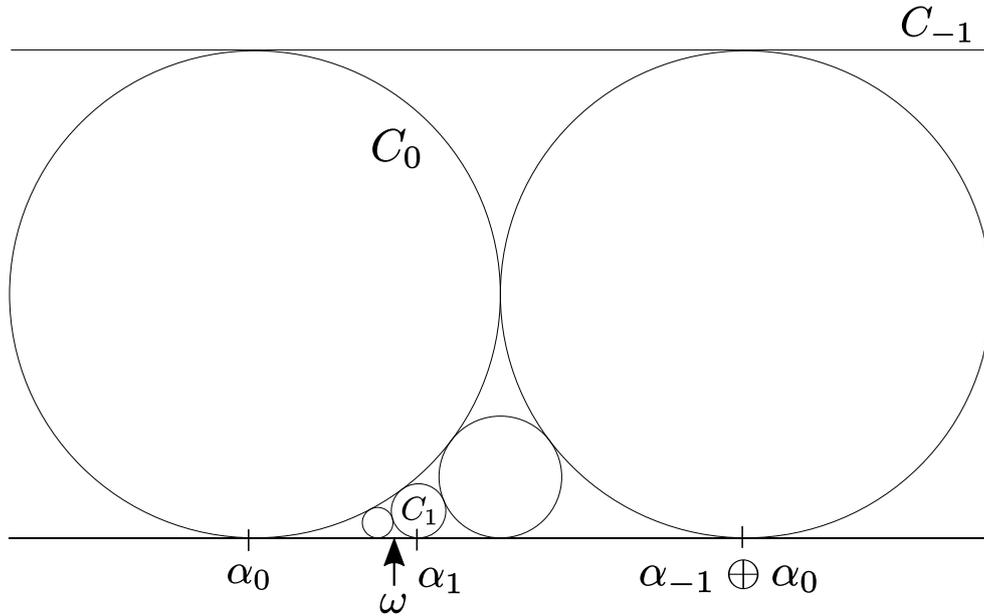


図 2.5:  $a_1 = 3$  の場合

以下同様に  $a_n, \alpha_n$  を決めていく. 繰り返しになるが念のため説明しよう. いま  $C_0 = C(\alpha_0), \dots, C_n = C(\alpha_n)$  まだが作図できているとする. ここでは  $\alpha_{n-1} < \alpha_n$  の場合を説明しよう. このとき

$$C_{n-1} \oplus C_n, \quad C_{n-1} \oplus C_n \oplus C_n, \quad C_{n-1} \oplus C_n \oplus C_n \oplus C_n, \quad \dots$$

と作図していくと, これらフォードの円と  $x$  軸との接点

$$\alpha_{n-1} \oplus \alpha_n, \quad \alpha_{n-1} \oplus \alpha_n \oplus \alpha_n, \quad \alpha_{n-1} \oplus \alpha_n \oplus \alpha_n \oplus \alpha_n, \quad \dots$$

は単調に増加していくが, この接点のうち  $\omega$  を通り過ぎる直前のものを  $\alpha_{n+1}$  として採用する. すなわち, 整数  $a_{n+1}$  として

$$C_{n-1} \oplus \overbrace{C_n \oplus \cdots C_n}^{a_{n+1}} < \omega < C_{-1} \oplus \overbrace{C_0 \oplus \cdots C_0}^{a_{n+1}+1}$$

を満たすものを取り, このとき

$$\alpha_{n+1} = C_{n-1} \oplus \overbrace{C_n \oplus \cdots C_n}^{a_{n+1}}$$

と定めるのである (図 2.6).

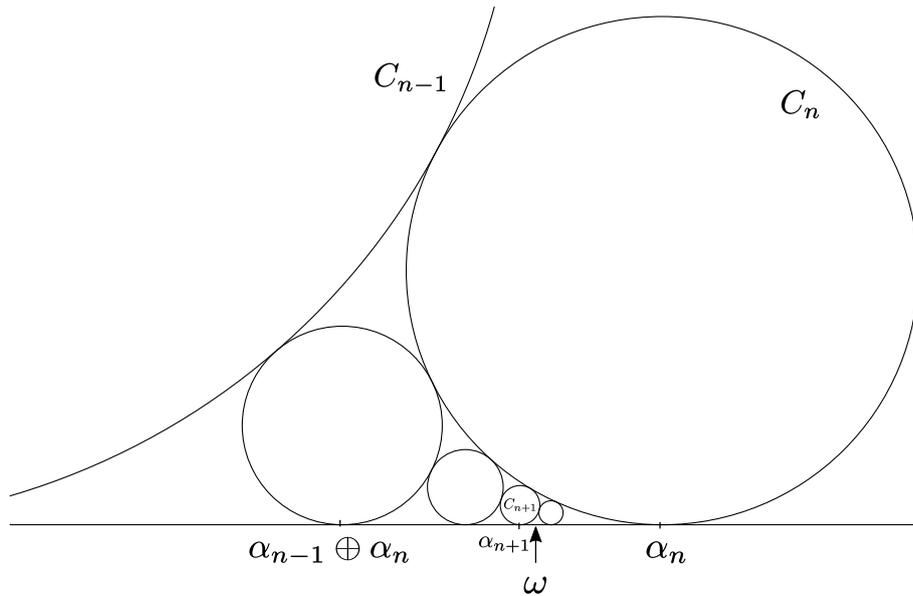


図 2.6:  $a_{n+1} = 3$  の場合

このように定めた  $a_n$  や  $\alpha_n$  が求めるものであること, すなわち  $\omega = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  と  $\alpha_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  が成り立つことを納得してほしい. このやり方は, 縦横比  $1 : \omega$  の長方形から正方形を順次取っていくことで  $a_n$  を求めたやり方に似ていることに気づくであろう.

これまでの説明より次の事実は明らかであるが, 以下でよく用いるので補題として述べておく (図 2.7) :

**補題 2.4.** 無理数  $\omega$  の収束分数列を  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  とするとき, 任意の  $n \geq 0$  に対して  $\omega$  は  $\alpha_{n+1}$  と  $\alpha_n \oplus \alpha_{n+1}$  の間に存在する.

この補題を用いると, 1 章では計算することで得られた定理 1.12 (3) の主張

$$|\omega - \alpha_{n+1}| < |\omega - \alpha_n|$$

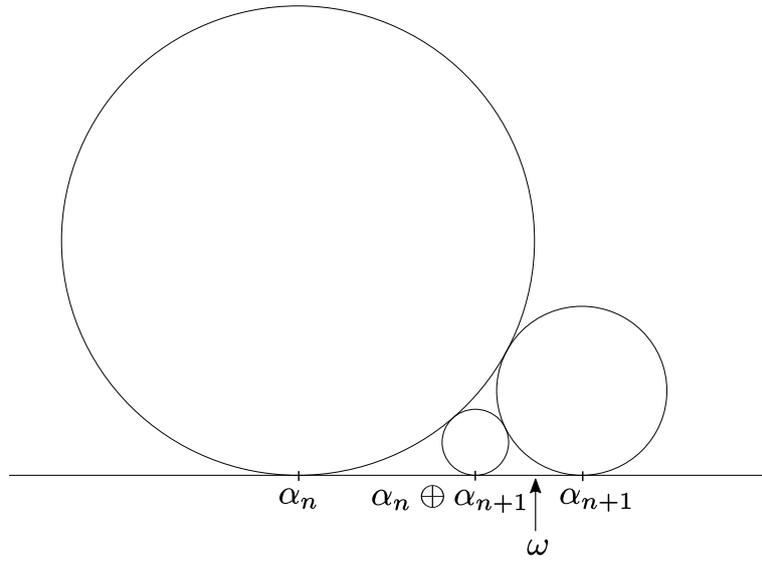


図 2.7:  $\omega$  は  $\alpha_{n+1}$  と  $\alpha_n \oplus \alpha_{n+1}$  の間にいる

は図 2.7 から明らかである. また定理 1.12 (1) の

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{(-1)^n}{q_{n+1}q_n}$$

も図形的に理解できる. 実際, 三平方の定理を用いると

$$(\alpha_{n+1} - \alpha_n)^2 = \left( \frac{1}{2q_{n+1}^2} + \frac{1}{2q_n^2} \right)^2 - \left( \frac{1}{2q_{n+1}^2} - \frac{1}{2q_n^2} \right)^2$$

より

$$|\alpha_{n+1} - \alpha_n| = \frac{1}{q_{n+1}q_n}$$

を得るので, あとは符号を考えればよい.

## 2.2 よい近似分数

この節では無理数  $\omega$  に近い有理数  $\frac{p}{q}$  に対して、その「近似のよさ」をフォードの円を介して図形的に考える。特に  $\omega$  の近似分数  $\alpha_n$  が「 $\omega$  のよい近似」となっていることを視覚的に理解する。

### $\sqrt{2}$ と $\pi$ の収束分数のフォードの円

$\sqrt{2} = [1, \bar{2}]$  の近似分数  $\alpha_n = [1, \overbrace{2, \dots, 2}^n]$  は  $\alpha_{n+2} = \alpha_n \oplus \alpha_{n+1} \oplus \alpha_{n+1}$  を満たすので、 $\alpha_{-1} = \frac{1}{0}$ ,  $\alpha_0 = \frac{1}{1}$  より

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\alpha_2 = \frac{7}{5} = 1.4$$

$$\alpha_3 = \frac{17}{12} \approx 1.4167$$

$$\alpha_4 = \frac{41}{29} \approx 1.4138$$

$$\alpha_5 = \frac{99}{70} \approx 1.414286$$

$$\alpha_6 = \frac{239}{169} \approx 1.414201$$

となる。対応するフォードの円を図 2.8 に表す。この図を見ると、 $\alpha_2 = \frac{7}{5}$  や  $\alpha_3 = \frac{17}{12}$  のフォードの円は、 $\sqrt{2}$  に近いその他の有理数のフォードの円に比べて際だって大きいことが見て取れる。そういう意味で  $\frac{7}{5}$  や  $\frac{17}{12}$  は  $\sqrt{2}$  のたいへんスジのよい近似であるといえる。

では次に  $\pi = 3.141592653589\dots$  を近似する分数を考える。

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$$

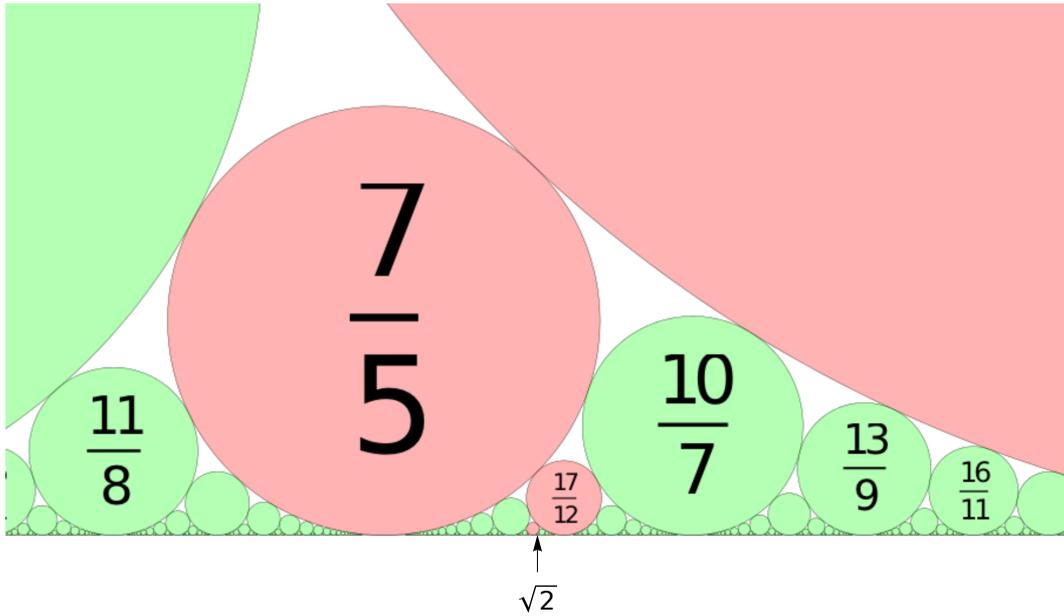


図 2.8:  $\sqrt{2}$  の近似分数のフォードの円 (赤)

を既知とする.  $\pi$  の収束分数を  $\{\alpha_n\}$  とするとき  $\alpha_{-1} = \frac{1}{0}$  と  $\alpha_0 = \frac{3}{1}$  より

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{-1} \oplus \overbrace{\alpha_0 \oplus \cdots \oplus \alpha_0}^7 = \frac{22}{7} \approx 3.1429 \\ \alpha_2 &= \alpha_0 \oplus \overbrace{\alpha_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_1}^{15} = \frac{333}{106} \approx 3.1415094 \\ \alpha_3 &= \alpha_1 \oplus \alpha_2 = \frac{355}{113} \approx 3.14159292 \\ \alpha_4 &= \alpha_2 \oplus \overbrace{\alpha_3 \oplus \cdots \oplus \alpha_3}^{292} = \frac{103993}{33102} \approx 3.14159265301 \end{aligned}$$

となる. 4 番目の近似分数  $\alpha_4$  においてすでに小数点以下 9 桁まで正しい値となっている. 図 2.9 と図 2.10 には  $\alpha_1 = \frac{22}{7}$ ,  $\alpha_2 = \frac{333}{106}$ ,  $\alpha_3 = \frac{355}{113}$  のフォードの円が描かれている.  $\alpha_1 = \frac{22}{7}$  と  $\alpha_3 = \frac{355}{113}$  のスジのよさが実感できるであろう. 一方で, 同じ近似分数でも  $\alpha_2 = \frac{333}{106}$  は  $\alpha_3 = \frac{355}{113}$  に比べるとスジが悪い.

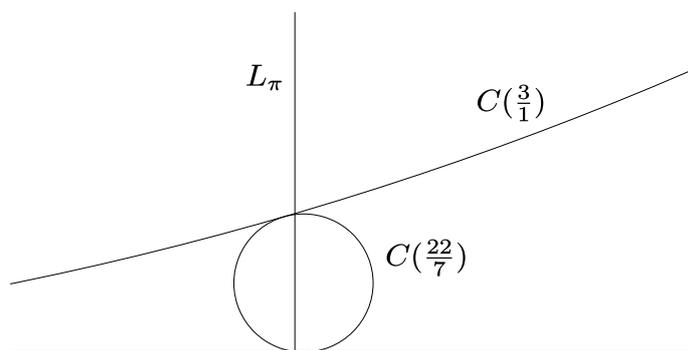


図 2.9:  $C(\frac{3}{1})$  と  $C(\frac{22}{7})$

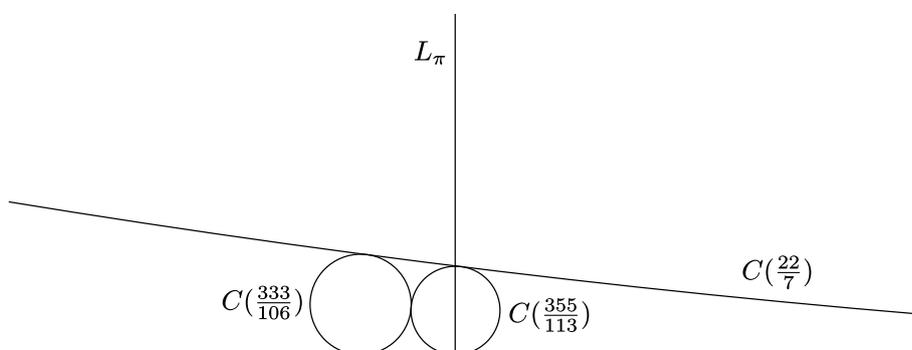


図 2.10:  $C(\frac{22}{7})$  と  $C(\frac{333}{106})$ ,  $C(\frac{355}{113})$

### 近さを測る指標

無理数  $\omega$  と有理数  $\frac{p}{q}$  の「近さ」を測る指標として、もっとも単純なのは

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right|$$

であろう。しかし、これだと

$$\left| \sqrt{2} - \frac{1414}{1000} \right| < \left| \sqrt{2} - \frac{17}{12} \right|$$

のように  $\sqrt{2}$  に対して  $\frac{17}{12}$  よりも近い有理数はいくらかでも存在して、 $\frac{17}{12}$  の「よさ」が伝わりにくい。そこで以下では次の2つの指標

$$D_\omega \left( \frac{p}{q} \right) = q \left| \omega - \frac{p}{q} \right|, \quad G_\omega \left( \frac{p}{q} \right) = q^2 \left| \omega - \frac{p}{q} \right|$$

を導入し、順にその性質をみていこう。

## 近さを測る指標 (その1) $D_\omega\left(\frac{p}{q}\right)$

ここでは

$$D_\omega\left(\frac{p}{q}\right) = q \left| \omega - \frac{p}{q} \right| = |q\omega - p|$$

の性質を調べる. 簡単にいうと,  $D_\omega\left(\frac{p}{q}\right)$  が小さいということは「分母が小さい割には  $\omega$  に近い」ことを表す. この量  $D_\omega\left(\frac{p}{q}\right)$  には幾何的な意味づけがある. 私はこのことを I. Short の解説 [10] で学んだ. いま上半平面に含まれる円で  $x$  軸と  $\omega$  で接して  $C\left(\frac{p}{q}\right)$  とも接するもの (これを  $C_\omega\left(\frac{p}{q}\right)$  と表す) を考えるとその円の半径が

$$\frac{1}{2}|q\omega - p|^2 = \frac{1}{2}D_\omega\left(\frac{p}{q}\right)^2$$

となる (図 2.11 の赤円は  $C_\omega(\alpha_n)$  を表す). 従って  $C_\omega\left(\frac{p}{q}\right)$  の半径が小さいほど  $D_\omega\left(\frac{p}{q}\right)$  の値が小さくなる.

具体例で見ると  $D_{\sqrt{2}}\left(\frac{17}{12}\right) \approx 0.0294$  である. 一方で  $D_{\sqrt{2}}\left(\frac{141}{100}\right) \approx 0.4213$  となるので,  $\frac{17}{12}$  は  $\frac{141}{100}$  よりも (この意味で) よい近似であるといえる. また  $\pi$  に関しては  $D_\pi\left(\frac{22}{7}\right) \approx 0.00885$ ,  $D_\pi\left(\frac{333}{106}\right) \approx 0.00882$ ,  $D_\pi\left(\frac{355}{113}\right) \approx 0.00003$  となる. 特に  $\frac{22}{7}$  と  $\frac{355}{106}$  は同程度の近似のよさであるといえる. このことは  $C_\pi\left(\frac{22}{7}\right)$  や  $C_\pi\left(\frac{355}{106}\right)$  が同程度の半径の円であることを意味するが, これは図 2.10 においてどちらの円も  $C\left(\frac{355}{113}\right)$  にほとんど重なるであろう様子から納得できる.

さて, 無理数  $\omega$  の近似分数  $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}$  に関して, 定理 1.12 (2) より

$$\frac{1}{(q_{n+1} + q_n)q_n} < |\omega - \alpha_n| < \frac{1}{q_{n+1}q_n}$$

が成立していた. これを  $D_\omega(\alpha_n) = q_n|\omega - \alpha_n|$  を用いて書き直すと次のようになる.

**定理 2.5.** 無理数  $\omega$  の収束分数列を  $\{\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}\}_{n=0}^\infty$  とするとき, 任意の  $n \geq 0$  に対して

$$\frac{1}{q_{n+1} + q_n} < D_\omega(\alpha_n) < \frac{1}{q_{n+1}}$$

が成り立つ.

この主張は図形的に考えると直ちに得られる. 実際, 円  $C_\omega(\alpha)$  の半径が  $\frac{1}{2}D_\omega(\alpha_n)^2$  であったので, この半径が  $\frac{1}{2(q_{n+1} + q_n)^2}$  より大きく  $\frac{1}{2q_{n+1}^2}$  より小さいことを示せばよいが, これは補題 2.4 と図 2.11 より明らかである.

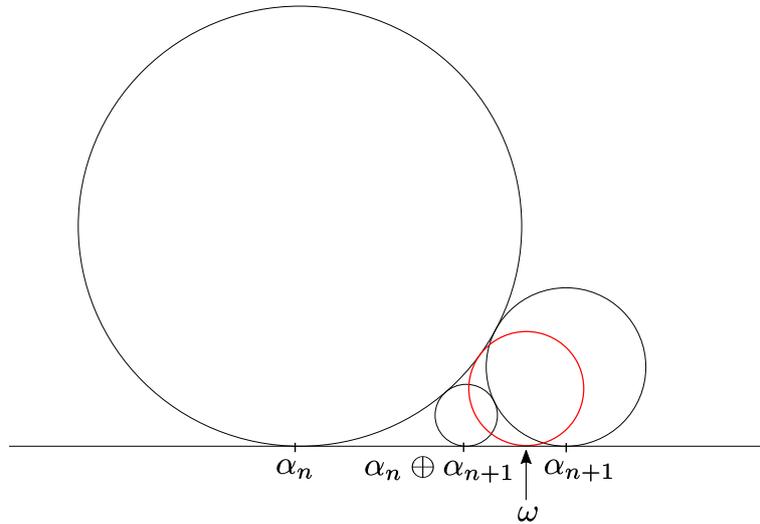


図 2.11:  $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_n \oplus \alpha_{n+1}$  のフォードの円と  $C_\omega(\alpha_n)$  (赤)

図 2.11 から次の主張も読み取れる：

**定理 2.6.** 無理数  $\omega$  の収束分数列を  $\{\alpha_n\}_{n=0}^\infty$  とするとき、任意の  $n \geq 0$  に対して

$$D_\omega(\alpha_{n+1}) < D_\omega(\alpha_n)$$

が成り立つ。

実際、 $C_\omega(\alpha_n)$  よりも  $C_\omega(\alpha_{n+1})$  が小さいことをいえばよいが、これは図 2.11 より明らかである。ここで補題 2.4 より  $\omega$  は  $\alpha_{n+1}$  と  $\alpha_n \oplus \alpha_{n+1}$  間にいることに注意しよう。

次の定理は無理数  $\omega$  の近似分数は  $D_\omega$  に関していい性質を持っていることを示す。

**定理 2.7.** 無理数  $\omega$  の収束分数列を  $\{\frac{p_n}{q_n}\}$  とする。このとき、有理数  $\frac{s}{t} \neq \frac{p_n}{q_n}$  に対して  $t < q_{n+1}$  ならば

$$D_\omega\left(\frac{s}{t}\right) > D_\omega\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$$

が成り立つ。

証明.  $t < q_{n+1}$  より  $C(\frac{s}{t})$  のサイズは  $C(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}})$  よりも大きい。ここでフォード

の円は互いに交わらないことと  $\omega$  は  $\frac{p_n}{q_n}$  と  $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$  の間にいることから,  $\frac{s}{t}$  は開区間  $(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}})$  には含まれない. また  $\frac{s}{t} \neq \frac{p_n}{q_n}$  と  $t < q_{n+1}$  より  $\frac{s}{t}$  は閉区間  $[\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}]$  にも含まれない. このような  $\frac{s}{t}$  に対して  $D_\omega(\frac{s}{t}) > D_\omega(\frac{p_n}{q_n})$  となることは (例えば図 2.11 を見ながら考えれば) 明らかである.  $\square$

**定義 2.8.** 有理数  $\frac{p}{q}$  が無理数  $\omega$  の**最良近似** (best approximation) であるとは, 有理数  $\frac{s}{t} \neq \frac{p}{q}$  に対して  $t \leq q$  ならば

$$D_\omega\left(\frac{s}{t}\right) > D_\omega\left(\frac{p}{q}\right)$$

が成り立つときをいう.

すなわち分母が  $q$  以下の分数の中で  $D_\omega$  の値が最小になるときに  $\frac{p}{q}$  は最良近似というのである. 以上の準備のもとに, 収束分数の  $D_\omega$  を用いた特徴付けが得られる.

**定理 2.9** (収束分数の特徴付け). 有理数  $\frac{p}{q}$  に対して次は同値:

- (1)  $\frac{p}{q}$  は  $\omega$  の収束分数.
- (2)  $\frac{p}{q}$  は  $\omega$  の最良近似.

証明. (1)  $\Rightarrow$  (2): これは定理 2.7 より明らか.

(2)  $\Rightarrow$  (1):  $\frac{p}{q}$  が最良近似分数であるとする. いま  $\omega$  の収束分数列  $\{\frac{p_n}{q_n}\}$  を取り,  $q_n \leq q < q_{n+1}$  を満たす  $n$  を固定する. このとき  $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$  を示したい. そこで  $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$  として矛盾を導こう. まず定理 2.7 を用いると,  $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$  と  $q < q_{n+1}$  より  $D_\omega(\frac{p}{q}) > D_\omega(\frac{p_n}{q_n}) \dots (*)$  が成り立つ. 一方で  $\frac{p}{q}$  が最良近似分数であることから,  $\frac{p_n}{q_n} \neq \frac{p}{q}$  と  $q_n \leq q$  より  $D_\omega(\frac{p_n}{q_n}) > D_\omega(\frac{p}{q})$  が成り立つが, これは (\*) に矛盾する. 以上より  $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ , すなわち  $\frac{p}{q}$  が収束分数であることがいえる.  $\square$

**近さを測る指標 (その 2)**  $G_\omega\left(\frac{p}{q}\right)$

次に無理数  $\omega$  と有理数  $\frac{p}{q}$  に対して

$$G_\omega\left(\frac{p}{q}\right) = q^2 \left| \omega - \frac{p}{q} \right|$$

という量を考えよう。これは

$$G_\omega\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{|\omega - \frac{p}{q}|}{C(\frac{p}{q}) \text{ の直径}}$$

と書き直してみると，図形的な意味がみえてくる。いま， $\omega$ を通り  $x$  軸に垂直な半直線

$$L_\omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \omega, y \geq 0\}$$

を考えると， $L_\omega$  と  $C(\frac{p}{q})$  が 2 点で交わる必要十分条件は  $G_\omega(\frac{p}{q}) < \frac{1}{2}$  となることである (図 2.12)。

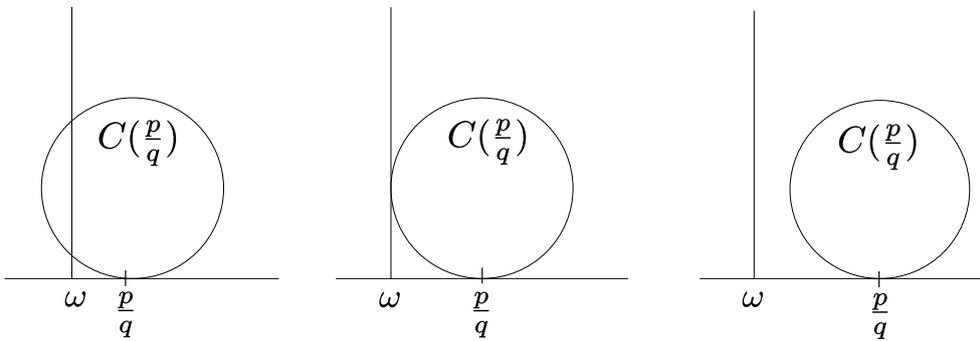


図 2.12: 左から  $G_\omega(\frac{p}{q}) < \frac{1}{2}$ ,  $G_\omega(\frac{p}{q}) = \frac{1}{2}$ ,  $G_\omega(\frac{p}{q}) > \frac{1}{2}$  の場合.

**定理 2.10.** 無理数  $\omega = [a_0, a_1, \dots, a_n, \dots]$  の収束分数を  $\alpha_n = [a_0, a_1, \dots, a_n]$  とするとき，任意の  $n \geq 0$  に対して

$$\frac{1}{a_{n+1} + 2} < G_\omega(\alpha_n) < \frac{1}{a_{n+1}}$$

が成り立つ。

証明.  $\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}$  とおく。定理 2.5 から

$$\frac{1}{q_{n+1} + q_n} < D_\omega(\alpha_n) < \frac{1}{q_{n+1}}$$

であったので

$$\frac{q_n}{q_{n+1} + q_n} < G_\omega(\alpha_n) < \frac{q_n}{q_{n+1}}$$

が成り立つ。ここで

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} > a_{n+1}q_n$$

と

$$q_{n+1} + q_n = (a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1} < (a_{n+1} + 2)q_n$$

より主張を得る。  $\square$

この定理から  $a_{n+1}$  がとても大きいとき  $\alpha_n = [a_0, \dots, a_n]$  は  $\omega$  の大変よい近似になっていることがわかる。例えば  $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, \dots]$  に対する  $\alpha_1 = [3, 7]$ ,  $\alpha_3 = [3, 7, 15, 1]$  などである。実際  $G_\pi(\alpha_1) \approx 0.062$ ,  $G_\pi(\alpha_3) \approx 0.0034$  となる。一方で  $\alpha_2 = [3, 7, 15]$  は  $a_3 = 1$  なのであまりよい近似ではない。実際  $G_\pi(\alpha_3) \approx 0.935$  と 1 に近い値になっている。

次の定理は、無理数  $\omega$  の収束分数は  $G_\omega$  の値がそこそ小さいことを保証する。

**定理 2.11.** 無理数  $\omega$  の収束分数列を  $\{\alpha_n\}$  とするとき、任意の  $n \geq 0$  に対して

- (1)  $G_\omega(\alpha_n) < 1$  が成り立つ。
- (2)  $G_\omega(\alpha_n) < \frac{1}{2}$  または  $G_\omega(\alpha_{n+1}) < \frac{1}{2}$  が成り立つ。

証明.  $\omega$  は  $\alpha_n$  と  $\alpha_{n+1}$  の間にあるので、どちらも明らかである。  $\square$

ここで、この定理 (1) の 1 というのは最良の数である。実際  $\omega$  やその収束分数  $\frac{p}{q}$  をうまく選ぶと  $G_\omega(\frac{p}{q})$  の値はいくらでも 1 に近いようにすることができる。このことは図 2.10 を眺めながら、 $\pi$  の収束分数  $\alpha_2 = [3, 7, 15]$  の  $G_\pi(\alpha_2)$  が 1 に近い値になることを観察すれば納得できるであろう。

**定理 2.12** (ラグランジュ).  $\omega$  は無理数とする。有理数  $\frac{p}{q}$  に対して  $G_\omega(\frac{p}{q}) < \frac{1}{2}$  ならば  $\frac{p}{q}$  は  $\omega$  の収束分数である。

証明.  $\omega$  の収束分数列を  $\{\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}\}$  とする。ここで  $\{q_n\}$  は単調増大列であるから、 $q_n \leq q < q_{n+1}$  を満たすある  $n \in \mathbb{N}$  が存在する。このとき  $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$  となることを示そう。いま  $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$  と仮定する。ここで  $\alpha_n < \alpha_{n+1}$  と仮定して一般性を失わない。このとき  $\alpha_n < \omega < \alpha_{n+1}$  である。  $q < q_{n+1}$  から  $C(\frac{p}{q})$  の半径  $\frac{1}{2q^2}$

は  $C(\alpha_{n+1})$  の半径  $\frac{1}{2q_{n+1}^2}$  より大きいので、フォードの円が互いに交わらないことを考えると、 $\frac{p}{q}$  は線分  $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$  の外にいないといけない。  $G_\omega(\frac{p}{q}) < \frac{1}{2}$  を満たす可能性がある唯一の場合は  $C(\frac{p}{q})$  が  $C(\alpha_n)$  と  $C(\alpha_{n+1})$  の両方に接する場合（すなわち  $\alpha_n \oplus \frac{p}{q} = \alpha_{n+1}$  となる場合）であるが（図 2.13），この場合でも

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| > \left| \alpha_{n+1} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{2q^2}$$

がわかる。（2番目の不等号は直感的には明らかで、具体的に計算で示すこともできる。等号が成り立つのは  $q_n = q$  の場合である。）従って  $C(\frac{p}{q})$  と  $L_\omega$  が交わらないこと、すなわち  $G_\omega(\frac{p}{q}) > \frac{1}{2}$  がわかる。  $\square$

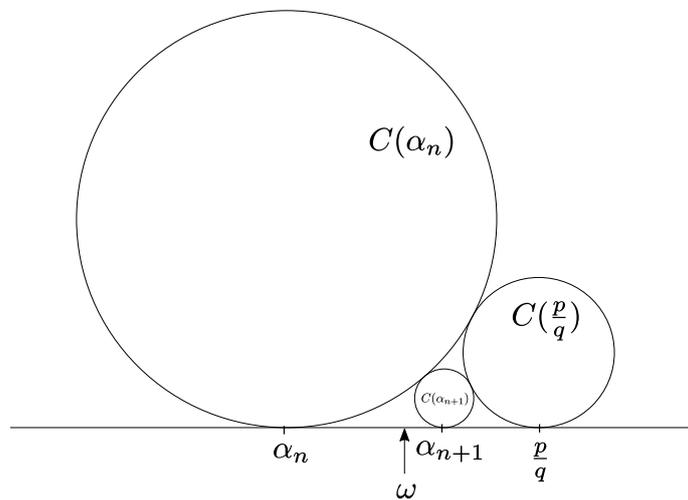


図 2.13:

**問題 2.13** (ペル方程式). 自然数  $D$  は平方数でないとする. 方程式  $x^2 - Dy^2 = 1$  が自然数解  $(X, Y)$  を持つとき  $\frac{X}{Y}$  は無理数  $\sqrt{D}$  の収束分数であることを示せ.

## 2.3 フルビッツの定理

定理 2.11 より, 任意の無理数  $\omega$  に対してその収束分数列を  $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$  とすれば各  $n$  に対して  $G_\omega(\alpha_n) < \frac{1}{2}$  か  $G_\omega(\alpha_{n+1}) < \frac{1}{2}$  が成立するのであった. このことから「任意の無理数  $\omega$  に対して  $G_\omega(\frac{p}{q}) < \frac{1}{2}$  を満たす有理数  $\frac{p}{q}$  は無限個存在する」ということがわかる. では, 与えられた実数  $A > 0$  に対して, 次の命題 (#) が成り立つかどうかを考えてみよう:

(#) 任意の無理数  $\omega$  に対して  $G_\omega(\frac{p}{q}) < A$  を満たす有理数  $\frac{p}{q}$  が無限個存在する.

もちろん  $A$  が大きいほどこの命題 (#) は成立しやすくなる.  $A = \frac{1}{2}$  ならば (#) は成立したので任意の  $A \geq \frac{1}{2}$  に対してはやはり成立する. 従って (#) が成立するような  $A$  がどこまで小さく取れるかが問題となる. 答えをいえば  $A \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$  ならば (#) は成立し,  $A < \frac{1}{\sqrt{5}}$  ならば (#) は成立しないのである. 証明が難しいのは「 $A \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$  ならば (#) は成立する」という部分で, これはフルビッツの定理と呼ばれている.

**定理 2.14** (フルビッツ). 任意の無理数  $\omega$  に対して

$$G_\omega\left(\frac{p}{q}\right) < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

を満たす有理数  $\frac{p}{q}$  は無限個存在する.

Ford は解説論文 [9] において, この定理のフォードの円を用いた幾何的な別証明を与えている. この節の目標はこの証明を解説することである.

その前に「 $A \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$  ならば (#) は成立しない」ことを見ておこう. 実際,  $\omega = \tau$  のときに (#) が成り立たなくなるのである. すなわち次の定理が成り立つ.

**定理 2.15.**  $A < \frac{1}{\sqrt{5}}$  と黄金比  $\tau$  に対して

$$G_\tau\left(\frac{p}{q}\right) < A$$

を満たす有理数  $\frac{p}{q}$  は高々有限個である.

この定理は次の補題から直ちに従う.

**補題 2.16.** 黄金比  $\tau$  の収束分数列を  $\{\frac{p_n}{q_n}\}_{n=0}^{\infty}$  とするとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_{\tau} \left( \frac{p_n}{q_n} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

が成り立つ (図 2.14 参照).

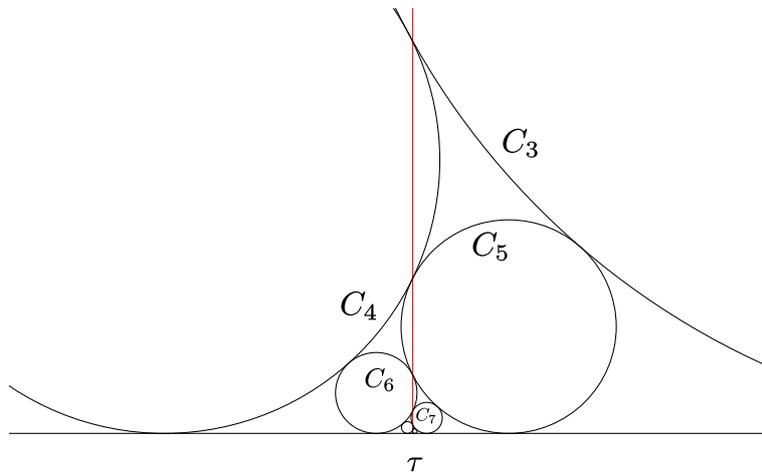


図 2.14:  $C_n = C(\frac{p_n}{q_n})$  ( $n = 3, \dots, 9$ ) と  $L_{\tau}$  (赤)

補題 2.16 の証明.  $\tau = [1, 1, 1, \dots] = [1, \dots, 1, \tau]$  に補題 1.9 を適用すると

$$\tau = \frac{p_n \tau + p_{n-1}}{q_n \tau + q_{n-1}}$$

が成り立つ. このとき

$$G_{\tau} \left( \frac{p_n}{q_n} \right) = q_n^2 \left| \tau - \frac{p_n}{q_n} \right| = q_n^2 \left| \frac{p_n \tau + p_{n-1}}{q_n \tau + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{\left| \tau + \frac{q_{n-1}}{q_n} \right|}$$

となる. ここで  $q_n = p_{n-1}$  より

$$\tau + \frac{q_{n-1}}{q_n} = \tau + \frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau + \frac{1}{\tau} = \sqrt{5}$$

となるので主張を得る. □

定理 2.15 の証明. いま  $\frac{p}{q}$  が  $G_\tau\left(\frac{p}{q}\right) < A < \frac{1}{\sqrt{5}}$  を満たすとする. このとき, 特に  $G_\tau\left(\frac{p}{q}\right) < \frac{1}{2}$  なので定理 2.12 より  $\frac{p}{q}$  は  $\tau$  の収束分数であることがわかる. ここで補題 2.16 から  $G_\tau\left(\frac{p}{q}\right) < A$  を満たす収束分数  $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$  はたかだか有限個なので主張を得る.  $\square$

フルビッツの定理 (定理 2.14) の証明に戻ろう. 命題 (#) が  $A = \frac{1}{2}$  で成り立つことの証明は, 連続する 2 つの収束分数  $\alpha_n, \alpha_{n+1}$  について考えることで得られた.  $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$  の場合のフルビッツの定理は連続する 3 つの収束分数  $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$  について考えることで得られる. まず定理の証明に必要な補題を 3 つ準備する.

**補題 2.17.** 半径  $r_1 \geq r_2 > 0$  の円  $K_1, K_2$  が図 2.15 のような配置にあるとする. 特に  $K_1, K_2$  の中心を結ぶ線分と  $x$  軸とのなす角を  $\theta > 0$  とする. ここで  $\lambda = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$  とおくと次が成り立つ:

$$(1) \sin \theta = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}, \quad \cos \theta = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1}, \quad \tan \theta = \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda}.$$

$$(2) \tan \theta \leq \frac{1}{2} \iff \lambda \leq \tau \quad (\text{複合同順})$$

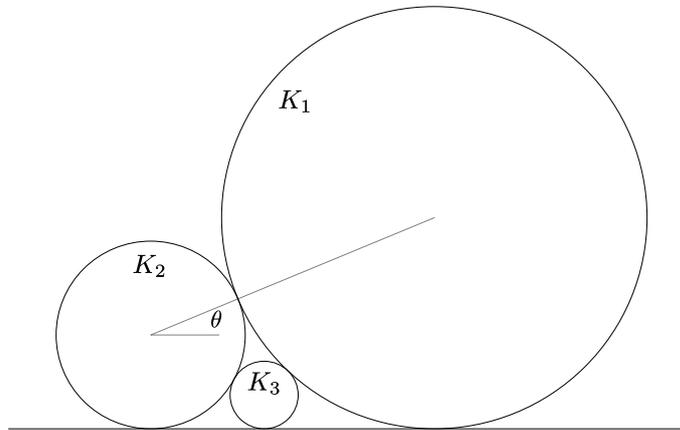


図 2.15: 補題 2.17 と補題 2.18 の設定

**問題 2.18.** この補題を証明せよ.

**補題 2.19.** 半径  $r_1 \geq r_2 > r_3 > 0$  の円  $K_1, K_2, K_3$  が図 2.15 のような配置にあるとする.

$$(1) \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}} = \frac{1}{\sqrt{r_3}} \text{ が成り立つ.}$$

$$(2) \lambda = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}, \mu = \sqrt{\frac{r_2}{r_3}} \text{ と置くととき } \mu = 1 + \frac{1}{\lambda} \text{ が成り立つ.}$$

$$(3) \lambda \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} \tau \iff \mu \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \tau \text{ が成り立つ.}$$

**問題 2.20.** この補題を証明せよ.

**補題 2.21.** 隣接する有理数  $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$  に対して, フォードの円  $C(\frac{p}{q}), C(\frac{r}{s})$  の中心を結ぶ線分と  $x$  軸のなす角を  $\theta > 0$  とする. このとき  $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$  の間に存在する無理数  $\omega$  に対して

$$G_\omega\left(\frac{p}{q}\right) < \frac{\cos \theta}{2} \quad \text{または} \quad G_\omega\left(\frac{r}{s}\right) < \frac{\cos \theta}{2}$$

のどちらか一方が成り立つ.

証明.  $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$  として一般性を失わない.  $C(\frac{p}{q})$  と  $C(\frac{r}{s})$  の接点から  $x$  軸に下ろした垂線の足を  $M$  とする. このとき  $|M - \frac{p}{q}| = \frac{\cos \theta}{2q^2}$  と  $|M - \frac{r}{s}| = \frac{\cos \theta}{2s^2}$  が成り立つ. さて,  $M$  は有理数であることが容易に確認できるので,  $\frac{p}{q} < \omega < M$  または  $M < \omega < \frac{r}{s}$  が成り立つ.  $\frac{p}{q} < \omega < M$  のとき

$$G_\omega\left(\frac{p}{q}\right) = q^2 \left| \omega - \frac{p}{q} \right| < q^2 \left| M - \frac{p}{q} \right| = \frac{\cos \theta}{2}$$

を得る. 同様に  $M < \omega < \frac{r}{s}$  のとき  $G_\omega(\frac{r}{s}) < \frac{\cos \theta}{2}$  を得る. □

以上の準備の元に次の定理が証明できてフォードの定理の証明も終わる.

**定理 2.22.** 無理数  $\omega$  の収束分数列を  $\{\alpha_n = \frac{p_n}{q_n}\}_{n=0}^\infty$  とする. このとき任意の  $n \geq 0$  に対して

$$G_\omega(\alpha_n) < \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad G_\omega(\alpha_{n+1}) < \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad G_\omega(\alpha_{n+2}) < \frac{1}{\sqrt{5}}$$

のうちどれか 1 つは成り立つ.

証明. まず  $\alpha_n$  と  $\alpha_{n+1}$  に補題 2.21 を適用しよう. このとき,  $C(\alpha_n)$  と  $C(\alpha_{n+1})$  の中心を結ぶ線分と  $x$  軸とのなす角を  $\theta > 0$  とすれば,  $G_\omega(\alpha_n) < \frac{\cos \theta}{2}$  または  $G_\omega(\alpha_{n+1}) < \frac{\cos \theta}{2}$  が成り立つ. 従って  $\tan \theta > \frac{1}{2}$  すなわち  $\cos \theta < \frac{2}{\sqrt{5}}$  のときは証明が終わる. 以下では  $\tan \theta \leq \frac{1}{2}$  の場合を考える.

ここで補題 2.17 (2) より  $\tan \theta = \frac{1}{2}$  となる必要十分条件は  $C(\alpha_n)$  と  $C(\alpha_{n+1})$  の半径比の平方根が  $\tau$  となることであるが, いま  $C(\alpha_n)$  と  $C(\alpha_{n+1})$  の半径比の平方根は有理数  $\frac{q_{n+1}}{q_n}$  であることから,  $\tan \theta \neq \frac{1}{2}$  である. 従って  $\tan \theta < \frac{1}{2}$  の場合を考えればよい.

ここで  $C(\alpha_{n+1})$  と  $C(\alpha_n \oplus \alpha_{n+1})$  の中心を結ぶ線分と  $x$  軸とのなす角を  $\varphi > 0$  とすると, 補題 2.17 (2) と補題 2.19 (3) を組み合わせることで  $\tan \varphi > \frac{1}{2}$  を得る. 次に  $C(\alpha_{n+1})$  と  $C(\alpha_{n+2})$  の中心を結ぶ線分と  $x$  軸とのなす角  $\psi > 0$  を考えると,  $\psi > \varphi$  より  $\tan \psi > \frac{1}{2}$  がいえて, これは  $\cos \psi < \frac{2}{\sqrt{5}}$  と同値である. ここで  $\alpha_{n+1}$  と  $\alpha_{n+2}$  に補題 2.20 を適用することで  $G_\omega(\alpha_{n+1}) < \frac{\cos \psi}{2} < \frac{1}{\sqrt{5}}$  または  $G_\omega(\alpha_{n+2}) < \frac{\cos \psi}{2} < \frac{1}{\sqrt{5}}$  を得る. 以上より証明が終わる.  $\square$

## 第3章 双曲幾何

ここでは円に関する反転を用いて双曲幾何を導入する。その後、フォードの円が双曲幾何の観点からみると自然な対象であることを説明する。

この章の参考書として、円に関する反転と双曲幾何の関係については [7] が、ユークリッド幾何から双曲幾何への歴史的・数学的背景については [6] が優れている。その他に [4], [5] も参考になる。

### 3.1 円に関する反転

平面を  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$  と表す。平面上の直線  $L$  に関する反転写像 (鏡映写像) を

$$\phi_L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

と表す。すなわち平面の任意の点  $P$  に対して  $P' = \phi_L(P)$  とすると、直線  $L$  は線分  $PP'$  の垂直二等分線になっている。このとき  $\phi_L \circ \phi_L$  は恒等写像であり、 $P$  が  $L$  上にあれば  $\phi_L(P) = P$  が成り立つことに注意する。

次に、平面上の円  $C$  (中心  $O$ , 半径  $r$ ) が与えられたとき、円  $C$  に関する反転写像

$$\phi_C : \mathbb{R}^2 - \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{O\}$$

を同様に定義しよう。すなわち、平面上の点  $P$  ( $\neq O$ ) に対して  $P' = \phi_C(P)$  を次の性質 (1), (2) を満たすように取る (図 3.1 参照) :

- (1)  $P'$  は、 $O$  を始点として  $P$  を通る半直線上にある。
- (2)  $|OP| : r = r : |OP'|$  を満たす。

直線の場合と同様に  $\phi_C \circ \phi_C$  は恒等写像であり、 $P$  が  $C$  上にあるときは  $\phi_C(P) = P$  が成り立つ。以下では  $\phi_C(O) = \infty$ ,  $\phi_C(\infty) = O$  と約束する。また、特に断らない限り点  $P, Q, \dots$  の像  $\phi_C(P), \phi_C(Q), \dots$  を  $P', Q', \dots$  と表す。

**問題 3.1.** (1)  $C$  が単位円  $x^2 + y^2 = 1$  のとき  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(u, v) \neq (0, 0)$   
 $\phi_C(u, v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}\right)$  となることを示せ.

(2) (1) と同じ事を複素数を用いて考えよ. すなわち  $C$  が単位円  $|z| = 1$  のとき  $w \in \mathbb{C}$ ,  $w \neq 0$  に対して  $\phi_C(w) = \frac{1}{\bar{w}}$  となることを示せ.

**定理 3.2.** 円  $C$  の中心を  $O$  とする.  $P, Q \in \mathbb{R}^2 - \{O\}$  に対して  $P' = \phi_C(P)$ ,  $Q' = \phi_C(Q)$  とするとき,  $\triangle OPQ$  と  $\triangle OQ'P'$  は相似であり, その相似比は  $\frac{|P'Q'|}{|PQ|} = \frac{r^2}{|OP||OQ|}$  となる.

証明.  $|OP||OP'| = r^2$  と  $|OQ||OQ'| = r^2$  より

$$|OP'| : |OQ'| = \frac{r^2}{|OP|} : \frac{r^2}{|OQ|} = |OQ| : |OP|$$

が成り立つので  $\triangle OPQ$  と  $\triangle OQ'P'$  は相似である. さらに相似比は

$$\frac{|P'Q'|}{|PQ|} = \frac{|OQ'|}{|OP|} = \frac{r^2}{|OP||OQ|}$$

となる. □

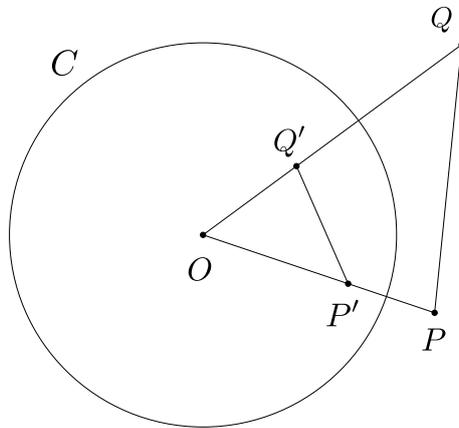


図 3.1:  $\triangle OPQ$  と  $\triangle OQ'P'$  は相似

次に平面上の直線や円が, 円  $C$  の反転  $\phi_C$  によって写される像を考えよう.

**定理 3.3** (直線の像). (1) 直線  $L$  が円  $C$  の中心  $O$  を通るとき,  $\phi_C(L) = L$  が成り立つ.

(2) 直線  $L$  が円  $C$  の中心  $O$  を通らないとき,  $\phi_C(L)$  は  $O$  を通る円となる.

証明. (1) は明らかである. (2) 点  $O$  から直線  $L$  へ下ろした垂線の足を  $P$  とおく. 直線  $L$  上の任意の点  $Q (\neq P)$  に対して  $\triangle OPQ$  と  $\triangle OQ'P'$  が相似なので角  $OQ'P'$  は直角となる. 従って  $\phi_C(L)$  は  $OP'$  を直径とする円である (図 3.2 参照). □

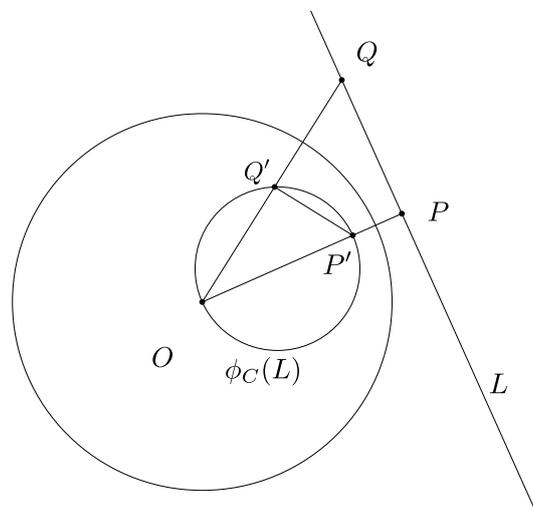


図 3.2: 直線  $L$  の像  $\phi_C(L)$  は円

**定理 3.4** (円の像). (1) 円  $K$  が円  $C$  の中心  $O$  を通るとき,  $\phi_C(K)$  は直線となる.

(2) 円  $K$  が円  $C$  の中心  $O$  を通らないとき,  $\phi_C(K)$  は円となる.

証明. (1) 定理 3.3 (2) の証明を逆にたどればよい. (2) は演習問題とする. □

**問題 3.5.** 定理 3.4 (2) を図 3.3 を参考に示してみよ.

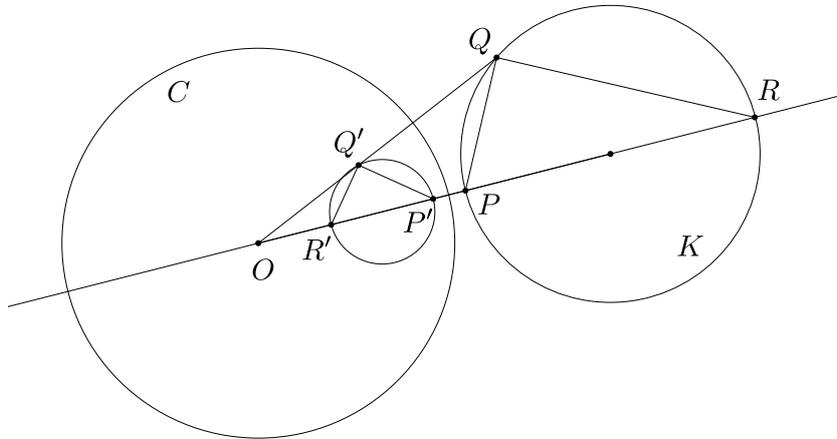


図 3.3: 円  $K$  の像  $\phi_C(K)$  は円

以上より  $\phi_C$  は「円または直線」を「円または直線」に写すことがわかった。ここで、直線も ( $\infty$  を通る) 特殊な円だと思ふことにすれば、 $\phi_C$  は円を円に写すといふことができる。

**定理 3.6.** 円  $C$  と円  $K$  が直交するならば  $\phi_C(K) = K$  が成り立つ。

証明. 図 3.4 のように点  $P, Q, R, S$  を取る. 直線  $OP$  が円  $K$  の接線となるので  $\angle OPS = \angle ORP$  となる. 従って  $\triangle ORP$  と  $\triangle OPS$  は相似となり  $S = \phi_C(R)$  がわかる. いま  $\phi_C(K)$  は  $P, Q, R \in K$  の  $\phi_C$  による像を通る円として特徴付けられるので,  $\phi_C(P) = P$ ,  $\phi_C(Q) = Q$  と  $\phi_C(R) = S$  より  $\phi_C(K) = K$  がわかる.  $\square$

注. 定理 3.4 (2) では円  $C$  の反転写像  $\phi_C$  によって, 円  $K$  はある円  $K'$  に写されることを示したが, 必ずしも  $K$  の中心が  $K'$  の中心に写されるわけではない. 実際, 例えば定理 3.5 の状況において  $\phi_C(K) = K$  であるが,  $K$  の中心は円  $C$  の外側にあり  $\phi_C$  によって  $C$  の内側に写されるている.

ここで一つ応用例を挙げよう.

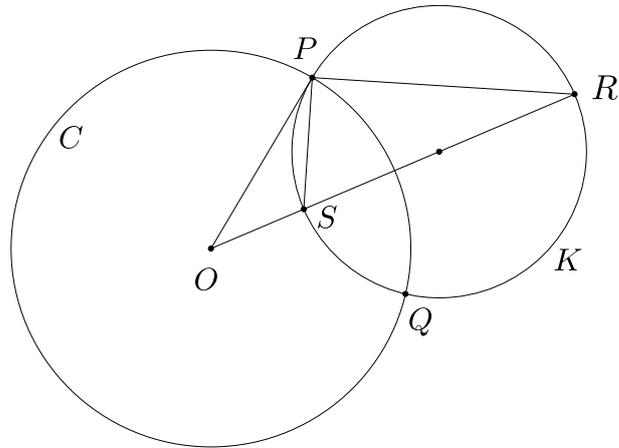


図 3.4: 定理 3.6 の説明

**定理 3.7** (トレミーの定理). 同一円周  $K$  上にある 4 点  $P, Q, R, S$  に対して

$$|PQ||RS| + |PS||QR| = |PR||QS|$$

が成り立つ (図 3.5).

証明. 4 点  $P, Q, R, S$  が乗っている円を  $K$  とする. いま点  $P$  中心の円  $C$  を 1 つ取り, この円  $C$  で反転することで  $K$  は直線  $K'$  に写される. ここで  $\triangle PQR$  と  $\triangle PR'Q'$  は相似で相似比は  $\frac{|Q'R'|}{|QR|} = \frac{r^2}{|PQ||PR|}$  となる. 同様に  $\frac{|R'S'|}{|RS|} = \frac{r^2}{|PR||PS|}$  と  $\frac{|Q'S'|}{|QS|} = \frac{r^2}{|PQ||PS|}$  を得る. これらを  $|Q'R'| + |R'S'| = |Q'S'|$  に代入すると

$$\frac{r^2}{|PQ||PR|} + \frac{r^2}{|PR||PS|} = \frac{r^2}{|PQ||PS|}$$

となり, これを整理して  $|PQ||RS| + |PS||QR| = |PR||QS|$  を得る.  $\square$

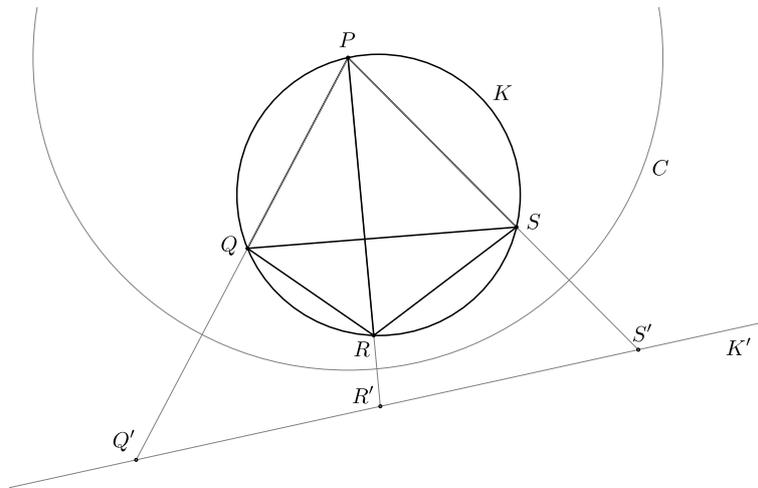


図 3.5: トレミーの定理

## 3.2 双曲平面

### ユークリッド幾何

まずユークリッド幾何の復習から始める。ユークリッド幾何とは次の5つの公理を認めてそこから展開される幾何学である。([6] に詳しい解説があるので参考にして欲しい。)

- (1) 異なる2点  $A, B$  を結ぶ線分がただ一つ存在する。
- (2) 線分は両端からいくらでも伸ばせる。
- (3) 異なる2点  $A, B$  に対して  $A$  を中心として  $B$  を通る円がただ一つ存在する。
- (4) 直角は全て等しい。
- (5) 直線  $L$  と  $L$  上にはない点  $A$  に対して  $A$  を通り  $L$  と交わらない直線が**ただ一つ**存在する。

この公理(5)を天降り的に認めるのではなく、他の公理(1)–(4)から導こうとする試みが歴史上数多くなされてきた。それらがすべてが失敗に終わった経験から、17世紀初頭にはガウス、ポヤーイ、ロバチェフスキーがそれぞれ独立に、公理(5)を仮定しなくても成り立つ幾何学の存在を認識するようになった。

た。それが非ユークリッド幾何、すなわち双曲幾何である。実際、この双曲幾何は「直線 $L$ と $L$ 上にはない点 $A$ に対して $A$ を通り $L$ と交わらない“直線”が無数に存在する」ような幾何学である。

この双曲幾何を円に関する反転を用いて導入したいのであるが、そのために、まず平面 $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ におけるユークリッド幾何の**合同変換**が平面の直線に関する反転を用いて記述できることを確認しておこう。以下で合同変換とは向きを保つ等長変換のことを意味する。等長変換とは勝手な2点の距離を不変にするような平面から平面への写像のことである。例えば直線に関する反転は等長変換であるが向きを反転させるので合同変換とは呼ばないことにする。ちなみに平面において「向き」を気にするときは魚の絵を描くとよい。さて、平面の合同変換は回転および平行移動で表される。すなわち平面 $\mathbb{R}^2$ を複素平面 $\mathbb{C}$ と同一視するとき、 $\mathbb{C}$ の合同変換 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は

$$f(z) = \alpha z + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1)$$

の形で表すことができる。従って、平面 $\mathbb{R}^2$ の合同変換全体の集合を $\text{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ と表すことにすると

$$\text{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = \{f(z) = \alpha z + \beta : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1\}$$

が成り立つ。

ここで、平面の合同変換を直線に関する反転を用いて表すことを考えよう。

$L, L'$ を直線とし、これらに関する反転の合成 $\phi_L \circ \phi_{L'}$ を考えると、 $L, L'$ が平行ならば平行移動となり、 $L$ と $L'$ が平行でない場合は $L, L'$ の交点を中心とする回転となる(図3.6)。従って、2直線 $L, L'$ に関して $\phi_L \circ \phi_{L'}$ は平面の合同変換となる。逆に任意の合同変換はある2直線 $L, L'$ を用いて $\phi_L \circ \phi_{L'}$ と表すことができる：

**補題 3.8.** 次が成り立つ：

$$\text{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = \{\phi_L \circ \phi_{L'} : L, L' \text{は } \mathbb{R}^2 \text{の直線}\}$$

証明.  $\text{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$ の元 $f$ が $f(z) = \alpha z + \beta$ と表されるとする。ここで $\alpha = 1$ のときは $f(z) = z + \beta$ は平行移動であるから、 $\phi_L \circ \phi_{L'}$ がこの平行移動となるような $L, L'$ を見つけることは容易である。一方で $\alpha \neq 1$ のときは $f$ は固定点 $z = \frac{\beta}{1-\alpha}$ を持ち、この点中心の回転を表す。この場合も $\phi_L \circ \phi_{L'}$ がこの回転となるような $L, L'$ を見つけることができる。□

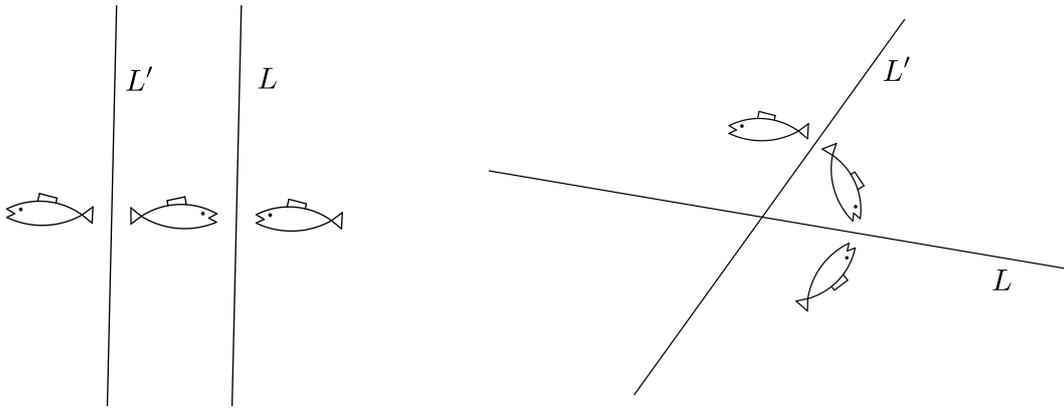


図 3.6: 直線に関する反転の合成, 平行移動 (左) と回転 (右)

### 双曲幾何 (上半平面モデル)

上半平面を

$$\mathbf{H} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

と表す. 以下ではこの  $\mathbf{H}$  において公理 (5) を仮定しない幾何学を展開したい. そこで, ユークリッド幾何においては合同変換が直線に関する反転で表せたことを参考にして, その逆に, まず  $\mathbf{H}$  の「直線」を定めて, その「直線」に関する反転で写り合うものが  $\mathbf{H}$  において「合同」であるとみなすような幾何を考えよう. そこで天下一的であるが次の 2 つの約束をする.

**約束 1**  $\mathbf{H}$  における「直線」とは  $x$  軸に直交する半円もしくは  $x$  軸に直交する半直線のことと約束する.

**約束 2**  $\mathbf{H}$  における「合同変換」全体の集合を次のように約束する:

$$\text{Isom}^+(\mathbf{H}) = \{\phi_L \circ \phi_{L'} : L, L' \text{ は } \mathbf{H} \text{ の「直線」}\}$$

このとき  $\mathbf{H}$  の平行線は沢山あるし, 三角形の内角の和は  $180^\circ$  未満となることがわかる. (ただし  $\mathbf{H}$  における角度は平面における角度と同じものとする.)

では  $\mathbf{H}$  の「合同変換」とは具体的にはどのようなものであろうか? 図 3.7 には  $\mathbf{H}$  の「直線」  $L, L'$  が交わらない場合と交わる場合の  $\phi_L \circ \phi_{L'}$  の様子が図示してある.

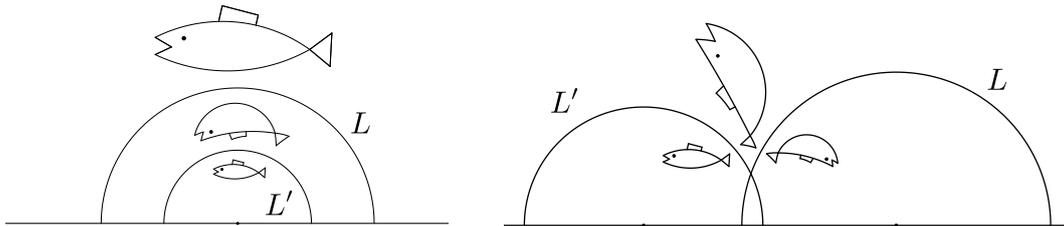


図 3.7:  $\mathbf{H}$  における「直線」 $L, L'$  に関する反転の合成.  $L, L'$  が交わらない場合 (左) と交わる場合 (右)

$\mathbf{H}$  の「合同変換」を数式を用いてもう少し正確に説明しよう. そのために上半平面  $\mathbf{H}$  を複素平面  $\mathbb{C}$  の部分集合とみなす:

$$\mathbf{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}.$$

以下では複素数  $z = x + iy$  の実部  $x$  を  $\operatorname{Re}(z)$ , 虚部  $y$  を  $\operatorname{Im}(z)$  と表す. さて,  $\mathbf{H}$  の「直線」 $L$  は  $x$  軸に直交する直線の場合は実数  $a$  を用いて  $\operatorname{Re}(z) = a$  と表せて, 「直線」 $L$  が中心  $a \in \mathbb{R}$ , 半径  $r > 0$  の半円のときは  $|z - a| = r$  と表せることに注意する. このとき次は容易に確認できる.

**補題 3.9.** (1)  $\operatorname{Re}(z) = a$  と表される  $\mathbf{H}$  の「直線」 $L$  に対して

$$\phi_L(z) = -\bar{z} + 2a$$

が成り立つ.

(2)  $|z - a| = r$  と表される  $\mathbf{H}$  の「直線」 $L$  に対して

$$\phi_L(z) = \frac{r^2}{\bar{z} - a} + a$$

が成り立つ.

**問題 3.10.** この補題を示せ.

この補題を用いて, 2つの「直線」に関する反転の合成としての「合同変換」の例をいくつか計算しよう.

**例 1**  $L, L'$  が共に  $x$  軸に垂直な直線の場合.  $L: \operatorname{Re}(z) = a$  と  $L': \operatorname{Re}(z) = 0$  に対して  $\phi_L(z) = -\bar{z} + 2a$ ,  $\phi_{L'}(z) = -\bar{z}$  なので

$$\phi_L \circ \phi_{L'}(z) = z + 2a$$

という水平方向に  $2a$  の平行移動となる.

**例 2**  $L, L'$  が共に原点中心の半円の場合.  $L: |z| = r$  と  $L': |z| = 1$  に対して  $\phi_L(z) = \frac{r^2}{\bar{z}}$ ,  $\phi_{L'}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$  なので

$$\phi_L \circ \phi_{L'}(z) = r^2 z$$

という原点中心拡大率  $r^2$  の拡大となる.

**例 3**  $L$  が虚軸で,  $L'$  が原点中心の半円の場合.  $L: \operatorname{Re}(z) = 0$  と  $L': |z| = 1$  に対して  $\phi_L(z) = -\bar{z}$ ,  $\phi_{L'}(z) = \frac{1}{\bar{z}}$  なので

$$\phi_L \circ \phi_{L'}(z) = -\frac{1}{z}$$

となる. これは  $z = i$  を固定して,  $i$  中心の角度  $\pi$  の「回転」である.

さて, 補題 3.9 を用いると任意の  $\operatorname{Isom}^+(\mathbf{H})$  の元  $\phi_L \circ \phi_{L'}$  は

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc > 0$$

の形に書くことが容易にわかる. 実際に上の 3 つの例は全てこのように書けている. さらに分母分子に同じ正の実数をかけることで  $ad - bc = 1$  が成り立つと仮定してもよい. 実際,  $\lambda > 0$  に対して

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$$

であり,  $(\lambda a)(\lambda d) - (\lambda b)(\lambda c) = \lambda^2(ad - bc)$  なので  $\lambda = 1/\sqrt{ad - bc}$  とすればよい. 実はここまで述べたことの逆も成り立つのである. すなわち, 任意の

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1$$

は,  $\mathbf{H}$  のある「直線」 $L, L'$  を用いて  $\phi_L \circ \phi_{L'}$  の形に書くことができるのである. このことは 2 行 2 列行列の標準形の理論を用いると説明ができるのであるが, ここでは証明せずに認めることとする. 以上のことをまとめると次のようになる:

**定理 3.11.**  $\mathbf{H}$  の「合同変換」全体の集合  $\text{Isom}^+(\mathbf{H})$  は

$$\text{Isom}^+(\mathbf{H}) = \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$$

と表すことができる.

この事実はユークリッド空間の合同変換全体の集合が

$$\text{Isom}^+(\mathbb{R}^2) = \{f(z) = \alpha z + \beta : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1\}$$

と表せることが対応している. ここで  $\text{Isom}^+(\mathbf{H})$  を表す実数  $a, b, c, d$  の組と,  $\text{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$  を表す複素数  $\alpha, \beta$  の組は, どちらも実質的に実3次元分の自由度があることに注意しよう.

さて,  $\mathbf{H}$  の「合同変換」 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  は  $\mathbf{H} \subset \mathbb{C}$  から自分自身への写像であるが, もちろん任意の  $z \in \mathbb{C}$  に対して値  $\frac{az+b}{cz+d}$  が定まる. さらに  $z = \infty$  のときも, 円に関する反転での  $\infty$  の像の約束を適用すれば値  $f(\infty)$  が定まる. このとき,  $z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  に関して  $f(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  となることは明らかであろう. ここで 1.3 節の記号を用いれば

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z$$

と書けることに注意する.

### 3.3 双曲平面とフォードの円

ここで  $\mathbf{H}$  の「合同変換」全体  $\text{Isom}^+(\mathbf{H})$  の中で、 $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  で係数  $a, b, c, d$  が整数となるものの集合  $G \subset \text{Isom}^+(\mathbf{H})$  を考えよう。すなわち

$$G = \left\{ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

とおく。次の定理 3.12 はこの  $G$  に含まれる「合同変換」はフォードの円たちをフォードの円たちに写すことを主張する。この節の前半の目標はこの定理を証明することである。その前に、 $f \in G$  は有理数を有理数に写すことに注意しよう。より正確には  $f \in G$  が  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  と表されるとき、任意の  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  に対して

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a\frac{p}{q} + b}{c\frac{p}{q} + d} = \frac{ap + bq}{cp + dq} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

が成り立つ。

**定理 3.12.**  $f \in G$  とする。 $f$  は各フォードの円をフォードの円に写す。より正確には、任意の  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  に対して  $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  と書くとき

$$f\left(C\left(\frac{p}{q}\right)\right) = C\left(\frac{r}{s}\right)$$

が成り立つ。

この定理の証明のために、その特殊な場合である  $\frac{p}{q} = \frac{1}{0}$  の場合だけを先に示しておこう：

**補題 3.13.**  $f \in G$  が  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  と表されるとき、 $f\left(C\left(\frac{1}{0}\right)\right) = C\left(\frac{a}{c}\right)$  が成り立つ。

証明.  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{-1}{c^2z+cd}$  と変形できる。これを

$$z \xrightarrow{f_1} c^2z \xrightarrow{f_2} c^2z + d \xrightarrow{f_3} \frac{-1}{c^2z + d} \xrightarrow{f_4} \frac{-1}{c^2z + d} + \frac{a}{c}$$

と見ることで  $f(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$  と表すことができる。ここで

$$f_1(z) = c^2z, \quad f_2(z) = z + d, \quad f_3(z) = -\frac{1}{z}, \quad f_4(z) = z + \frac{a}{c}$$

である.

では  $C(\frac{1}{0})$  の  $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$  による像を考えよう.  $C(\frac{1}{0})$  は直線  $y = 1$  であり, この直線は  $f_1(z) = c^2 z$  によって直線  $y = c^2$  に写る. この直線は  $f_2(z) = z + d$  では同じ直線に写される. 次に  $f_3(z) = -\frac{1}{z}$  によって, 直線  $y = c^2$  は中心が  $(0, \frac{1}{c^2})$  で半径が  $\frac{1}{c^2}$  の円に写る. この円は, 最後に  $f_4(z) = z + \frac{a}{c}$  によって円  $C(\frac{a}{c})$  に写る. 以上より  $f(C(\frac{1}{0})) = C(\frac{a}{c})$  が示された.  $\square$

次に補題 3.13 を用いて定理 3.12 を証明しよう.

定理 3.12 の証明.  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $f(\frac{1}{0}) = \frac{r}{s}$  とする. いま整数  $l, m$  で  $pm - lq = 1$  を満たすものをとる. (このような  $l, m$  の組はたくさん存在する. 実際, 有理数  $\frac{l}{m} < \frac{p}{q}$  で  $C(\frac{l}{m})$  と  $C(\frac{p}{q})$  が接するものを考えればよい.) このとき

$$g(z) = \frac{pz + l}{qz + m}$$

を考えるとこれも  $G$  の元である. 従って補題 3.12 を適用すると  $g(\frac{1}{0}) = \frac{p}{q}$  より  $g(C(\frac{1}{0})) = C(\frac{p}{q}) \dots (*)$  が成り立つ.

一方で  $f \circ g$  も  $G$  の元であるので (下の問題参照), これにも補題 3.13 を適用すると,  $f \circ g(\frac{1}{0}) = f(\frac{p}{q}) = \frac{r}{s}$  より  $f \circ g(C(\frac{1}{0})) = C(\frac{r}{s})$  が成り立つ. 従って

$$C\left(\frac{r}{s}\right) = f \circ g\left(C\left(\frac{1}{0}\right)\right) = f\left(g\left(C\left(\frac{1}{0}\right)\right)\right) = f\left(C\left(\frac{p}{q}\right)\right)$$

となることがわかる. ただし最後の等号で (\*) を用いた.  $\square$

**問題 3.14.**  $f, g \in G$  に対して  $f \circ g \in G$  を示せ.

**系 3.15.** 任意の 2 つのフォードの円は双曲平面の中で「合同」である. すなわち任意の  $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  に対して  $C(\frac{p}{q})$  を  $C(\frac{r}{s})$  に写すような「合同変換」 $f \in G$  が存在する.

証明. 定理 3.12 の証明と同じ議論より, ある  $g, h \in G$  で  $g(\frac{1}{0}) = \frac{p}{q}$  と  $h(\frac{1}{0}) = \frac{r}{s}$  を満たすものが取れる. ここで  $g$  の逆写像  $g^{-1}$  も  $G$  の元であることがわかり, 上の問題より  $h \circ g^{-1} \in G$  もわかる. ここで  $f = h \circ g^{-1}$  とおけば,  $f(\frac{p}{q}) = \frac{r}{s}$  なので  $f\left(C\left(\frac{p}{q}\right)\right) = C\left(\frac{r}{s}\right)$  がいえる.  $\square$

この系から、任意の2つのフォードの円は双曲幾何においては対等な立場にあることがわかる。より専門的な双曲幾何の言葉で述べると、双曲曲面  $\mathbf{H}/G$  のカスプにおける最大のホロサークル近傍の  $\mathbf{H}$  への持ち上げがフォードの円たちの集合になっている。

## 黄金比と合同変換

ここでは黄金比の収束分数列に対応するフォードの円たちが、 $\mathbf{H}$  のある「合同変換」によってスライドしていく様子を説明しよう。

黄金比  $\tau = [1, 1, \dots] = 1 + \frac{1}{\tau}$  であった。このことから

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z} = \frac{z+1}{z}$$

という写像を考えてみるのは自然だが、残念ながら  $f$  は  $G$  の元ではないことがわかる。しかし、さらに

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{z}} = \frac{2z+1}{z+1}$$

を考えてみると今度は  $G$  の元であることがわかる。

この写像  $f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$  と  $\tau$  の収束分数列に対応するフォードの円の関係を見てみよう。以下の議論は図 3.8 を参照して欲しい。まず、作り方から  $f(\tau) = \tau$  であることがわかる。ほかにも  $f(z) = z$  を満たす複素数  $z$  があるか探してみよう。  $f(z) = \frac{2z+1}{z+1} = z$  すなわち  $z^2 - z - 1 = 0$  の解は  $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  なので、 $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  以外に  $\tau$  の共役解  $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$  も写像  $f$  の固定点であることがわかった。さらに、2点  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  を端点を持つ  $\mathbf{H}$  の「直線」を  $L$  とすると、 $f(L) = L$  であることがわかる。

次に  $f$  によって  $\tau$  の収束分数列  $\alpha_n = \overbrace{[1, 1, \dots, 1]}^{n+1} = \frac{p_n}{q_n}$  がどのように写されるかを考える。  $f(z)$  の形より  $f(\alpha_n) = \alpha_{n+2}$  が  $n \geq -1$  で成り立つことがわかる。従って定理 3.12 より  $f(C(\alpha_n)) = C(\alpha_{n+2})$  もいえる。さらに、直線  $L$  は  $C_0, C_1$  の接点と  $C_1, C_2$  の接点を通ることが確かめられる。従って  $L$  上に  $C_i, C_{i+1}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) の接点に乗っていて、 $f$  によって  $C_i, C_{i+1}$  の接点が  $C_{i+2}, C_{i+3}$  の接点に写されることがわかる。これらの状況をデフォルメして表現したのが図 3.9 である。この図において  $f$  の作用は平行移動となっている。

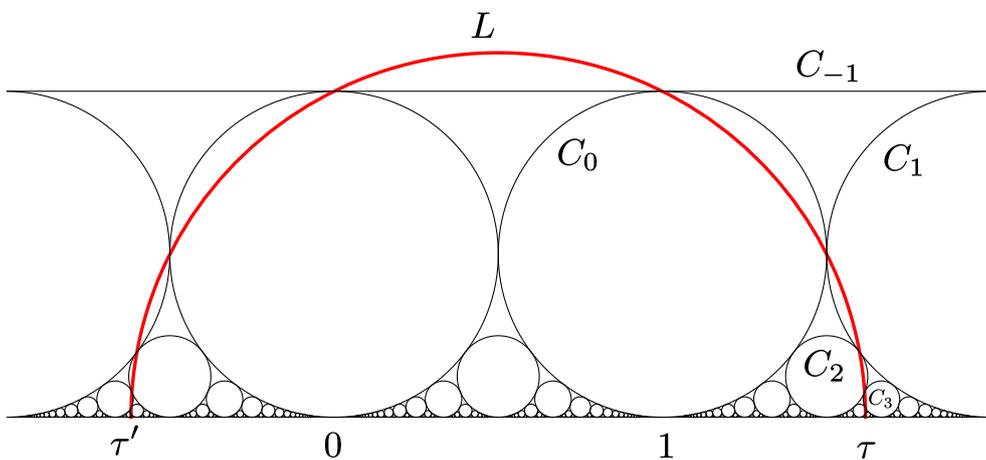


図 3.8: 区間  $[-1, 2]$  に含まれる有理数のフォードの円と半円  $L$

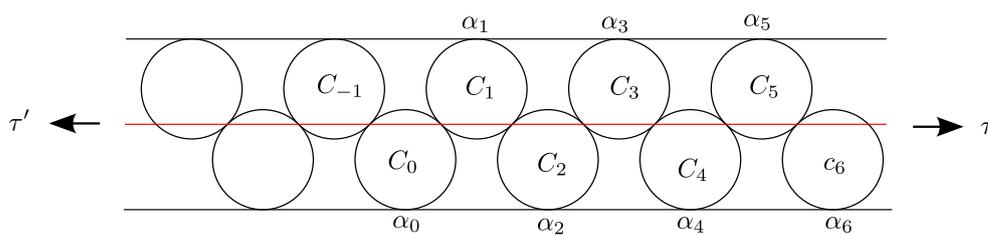


図 3.9: 図 3.8 をデフォルメしたもの

## 関連図書

- [1] 高木貞治「初等整数論講義」共立出版
- [2] 芹沢正三「数論入門」講談社ブルーバックス
- [3] R. A. ダンラップ「黄金比とフィボナッチ数」日本評論社
- [4] 阿原一志「ハイプレイン のりとはさみでつくる双曲平面」日本評論社
- [5] 寺坂英孝「非ユークリッド幾何の世界」講談社ブルーバックス
- [6] 小林昭七「ユークリッド幾何から現代幾何へ」日本評論社
- [7] T. ニーダム「ヴィジュアル複素解析」培風館
- [8] F. Bonahon, *Low-Dimensional Geometry*, American Mathematical Society.
- [9] L. R. Ford, *Fractions*, The American Mathematical Monthly 45 (1938), no. 9, 586–601. <http://www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/ford.pdf> からフリーダウンロード可.
- [10] I. Short, *Ford circles, continued fractions and rational approximation*, The American Mathematical Monthly 118 (2011), no. 2, 130–135.