離散数学及び演習
講義10　2014. 6.26（木）

多項式
（教科書　pp.151-156）
環
（教科書　pp.157-161）

教科書･･･野崎昭弘：離散系の数学、近代科学社

代数系（algebraic system）

多項式（polynomial）

- 係数a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0∈**R** と変数 x∈**R** についての **R** 上の（1 変数）多項式
  - $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
  - $n=0$ のとき
    $P(x) = a_0$　… 定数多項式（constant polynomial）
  - a_n, a_{n-1}, …, a_1, $a_0 = 0$ のとき
    $P(x) = 0$　… 零多項式（zero polynomial）
  - a_i … i 次の係数（coefficient）

3

多項式の次数（degree）

- **R** 上の多項式
  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
  の次数 deg($P(x)$)
  - $a_n \neq 0$ のとき　deg($P(x)$)$=n$
  - $P(x)=0$ のとき　deg($P(x)$)$=0$

例：　deg($5x^3 - x + 1$)$=3$
　　　deg(a_0)$=0$

- n 次多項式 $P(x)$ ($\neq 0$) において，$a_n \neq 0$

4

モニックな多項式（monic polynomial）

- **R** 上の n 次多項式 $P(x)$ はモニックである
  - n 次の係数 $a_n = 1$

例：　$x^3 - x + 1$

5

多項式の基本的性質

R[x]：　**R** 上のすべての 1 変数多項式からなる集合

任意の $P(x)$, $S(x)$ ∈**R**[x] に対して,
- $P(x) + S(x)$ ∈ **R**[x]
- $P(x) - S(x)$ ∈ **R**[x]
  - $0 - S(x) = -S(x)$ ∈ **R**[x]
- $P(x) \cdot S(x)$ ∈ **R**[x]
- 一般に,　$P(x) / S(x)$ ∉**R**[x]
  - **R**[x] は加法，減法，乗法について閉じている.
  - **R**[x] は除法について閉じていない.
    - 剰余のある除法

6

除法定理(division theorem)

任意の $P(x)$, $S(x) \in \mathbf{R}[x]$ ($P(x) \neq 0$) に対して,
組($Q(x)$, $R(x)$) $\in \mathbf{R}[x]^2$ が唯一存在して,
$S(x) = Q(x) \cdot P(x) + R(x)$
($0 \leq \deg(R(x)) < \deg(P(x))$)

- $Q(x)$ … 商(quotient)
- $R(x)$ … 剰余(remainder)

例: $x^3 - x + 1 = (x+2) \cdot (x^2 - 2x + 3) + (-5)$
$3x^4 - 2x^3 + 5x - 7 = (3x^2 + x - 8) \cdot (x^2 - x + 3) + (-6x + 17)$

7

因数(factor)

$P(x)$, $S(x) \in \mathbf{R}[x]$ に対して,

- $P(x)$ は $S(x)$ の因数(factor)である
  $P(x)$ は $S(x)$ を割り切る(divide)
  ($S(x)$ は $P(x)$ で割り切れる(divisible))
  … $P(x) \mid S(x)$
  - ある $Q(x) \in \mathbf{R}[x]$ が存在して, $S(x) = Q(x) \cdot P(x)$

例:

- $x - 1 \mid x^2 - 1$　　($x - 1$ は $x^2 - 1$ の因数)
  - $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
- 任意の $c \in \mathbf{R} - \{0\}$ に対して, $cx - c \mid x^2 - 1$
  - $x^2 - 1 = (1/c \cdot x + 1/c)(c \cdot x - c)$
  - 一般に, 因数 $P(x)$ に対して, $cP(x)$ ($c \in \mathbf{R} - \{0\}$)も因数である.

8

定理

$P(x)$, $S(x) \in \mathbf{R}[x]$ に対して,
$S(x) \neq 0$ かつ $P(x) \mid S(x)$ ならば,
$\deg(P(x)) \leq \deg(S(x))$

特に, $P(x)$, $S(x) \in \mathbf{R}[x]$ がモニックで,
$P(x) \neq S(x)$ かつ $P(x) \mid S(x)$ ならば,
$\deg(P(x)) < \deg(S(x))$

9

公因数(共通因数)

$P(x)$, $S(x) \in \mathbf{R}[x]$ に対して,

- $D(x) \in \mathbf{R}[x]$ は $P(x)$, $S(x)$ の公因数(共通因数)
  (common factor)である
  - $D(x) \mid P(x)$ かつ $D(x) \mid S(x)$.
- $D(x) \in \mathbf{R}[x]$ は $P(x)$, $S(x)$ の最大公因数(最大共通因数)
  (greatest common factor)である
  … $D(x) = \gcd(P(x), S(x)) = (P(x), S(x))$
  - $D(x)$ は $P(x)$, $S(x)$ のモニックな公因数で, かつ,
    $P(x)$, $S(x)$ の任意の公因数 $D'(x)$ に対して,
    $D'(x) \mid D(x)$ ($D'(x)$ は $D(x)$ の因数) .

例: $x^2 - 1$ の因数 : 1, $x - 1$, $x + 1$, $x^2 - 1$, c, $cx - c$, $cx + c$, $cx^2 - c$ ($c \neq 0$)
$x^3 - 1$ の因数 : 1, $x - 1$, $x^2 + x + 1$, $x^3 - 1$,
c, $cx - c$, $cx^2 + cx + c$, $cx^3 - c$ ($c \neq 0$)

- $x^2 - 1$ と $x^3 - 1$ の公因数 : 1, $x - 1$, c, $cx - c$ ($c \neq 0$)
- $x^2 - 1$ と $x^3 - 1$ の最大公因数 : $x - 1$

10

定理

- 任意の $P(x)$, $S(x) \in \mathbf{R}[x]$ に対して,
  $\gcd(P(x), S(x)) = \gcd(S(x), P(x))$.
- 任意の $P(x)$, $S(x) \in \mathbf{R}[x]$ に対して,
  $\gcd(P(x), 0) = P(x)$.
  特に, $\gcd(0, 0) = 0$.
- モニックな多項式 $P(x)$, $S(x) \in \mathbf{R}[x]$ の最大公因数は
  $P(x)$, $S(x)$ の公因数の中で最大次数である.

11

互いに素

- $P(x)$, $S(x) \in \mathbf{R}[x]$ は互いに素である
  (relatively prime, coprime)
  - $\gcd(P(x), S(x)) = 1$

12

定理

任意の $P(x)$, $S(x)\in\mathbf{R}[x]$ に対して,
$X(x)$, $Y(x)\in\mathbf{R}[x]$ が存在して,
$P(x)\cdot X(x)+S(x)\cdot Y(x)=\mathrm{gcd}(P(x), S(x))$.

13

系

任意の $P(x)$, $S(x)$, $T(x)$ $\in\mathbf{R}[x]$ に対して,
$\mathrm{gcd}(P(x), S(x))=1$ かつ $P(x) \mid S(x)\cdot T(x)$ ならば,
$P(x) \mid T(x)$.

14

定理(Euclid の互除法の原理)

任意の $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)\in\mathbf{R}[x]$に対して,
$S(x)=Q(x)\cdot P(x)+R(x)$ ならば,
$\mathrm{gcd}(S(x), P(x))=\mathrm{gcd}(P(x), R(x))$.

例： $\mathrm{gcd}(x^4+x^3+3x^2+2x+2,\ x^3-2x^2-2x-3)$
$=\mathrm{gcd}(x^3-2x^2-2x-3,\ 11(x^2+x+1))$
- $x^4+x^3+3x^2+2x+2=(x+3)(x^3-2x^2-2x-3)+11(x^2+x+1)$

$=\mathrm{gcd}(x^3-2x^2-2x-3,\ x^2+x+1)$
$=\mathrm{gcd}(x^2+x+1,\ 0)$
- $x^3-2x^2-2x-3=(x-3)(x^2+x+1)$

$=x^2+x+1$

15

既約多項式(reduced polynomial)

$P(x)\in\mathbf{R}[x]$ は既約多項式である
- $P(x)$ はモニックであり, かつ, そのモニックな因数は 1 と $P(x)$だけである

例： $x+c$
x^2+1, x^2+x+1, x^2-x+1
- 一般に, $b^2-4c<0$ のとき, x^2+bx+c は既約多項式.

16

定理

$S(x)\in\mathbf{R}[x]$, $\deg(S(x))\geq 1$ ならば,
既約多項式 $P(x)\in\mathbf{R}[x]$ が存在して,
$\deg(P(x))\leq\deg(S(x))$ かつ $P(x)\mid S(x)$.

17

定理

既約多項式は無限に存在する.

18

定理

任意の $S(x)$, $T(x) \in \mathbf{R}[x]$ と任意の既約多項式
$P(x) \in \mathbf{R}[x]$ に対して，$P(x) \mid S(x) \cdot T(x)$ ならば，
$P(x) \mid S(x)$ または $P(x) \mid T(x)$.

19

既約因数分解の一意性定理

任意の $P(x) \in \mathbf{R}[x]$ は既約多項式
$D_1(x)$，$D_2(x)$，…，$D_r(x) \in \mathbf{R}[x]$ と
$c \in \mathbf{R}$ に対して，

$$P(x) = c \cdot D_1(x) \cdot D_2(x) \cdot \ldots \cdot D_r(x)$$

の形（既約多項式の積の形）で表すことができ，
その表現は積の順序を除けば一意である．

例：$2x^6 - 30x^4 - 28x^3 + 72x^2 + 48x - 64$
$= 2 \cdot (x-4) \cdot (x-1)^2 \cdot (x+2)^3$

20

整数と多項式の対応

整数	約数	自然数	素数	絶対値
多項式	因数	モニックな多項式	既約多項式	次数

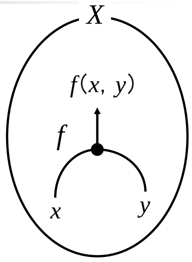
- 両者に共通な性質がある理由は？
- 他にも共通な性質を示す数学的構造はあるか？
- 本質的に共通な性質は何か？
  - 数学的構造（代数系）の公理化

21

2 項演算（binary operator）

- 集合 X 上の 2 項演算 f
  - 関数 $f : X^2 \to X$

例：　加法＋：$\mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}$, $\mathbf{R}[x]^2 \to \mathbf{R}[x]$
　　乗法・：$\mathbf{Z}^2 \to \mathbf{Z}$, $\mathbf{R}[x]^2 \to \mathbf{R}[x]$



- 関数値 $f(x, y) \in X$ の記法
  - $f(x, y)$ … 前置記法（prefix notation）
    （ポーランド記法（Polish notation））
    例：＋5 3，・$P(x)$ $S(x)$
  - $x\,f\,y$ … 中置記法（infix notation）
    例：5＋3，$P(x) \cdot S(x)$
  - $x\,y\,f$ … 後置記法（postfix notation）
    （逆ポーランド記法（reverse Polish notation））
    例：5 3＋，$P(x)$ $S(x)$・
    - 世界初の科学技術計算用電卓 HP-35（1972）
    - プログラミング言語Forth（1971）

©Kubanczyk(wikipedia)

22

代数系（algebraic system）

- 代数系
  - 組 $(X, f_1, \ldots, f_n)$
  - X は集合　…　基礎集合（basic set）
  - f_i ：$X^2 \to X$（各 f_i は X 上の 2 項演算）
    - X は演算 f_i について閉じている

例：
  - $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$
  - $(\mathbf{R}[x], +, \cdot)$
  - 集合 A に対して，$(\mathbf{P}(A), \cup, \cap)$
  - 束 L に対して，$(L, +, \cdot)$
    - ＋ … 結び，・… 交わり

- 演算が明らかなとき　…　単に代数系 X

23

環（ring）

- 代数系 $(R, +, \cdot)$ は環である
  - 次の（1）～（7）が成り立つ．

（1）任意の $x, y, z \in R$ に対して，$x + (y+z) = (x+y) + z$
（加法の結合則（associative law））

（2）$c \in R$ が存在して，任意の $x \in R$ に対して，$x + c = c + x = x$
（加法の単位元の存在）
  - c … 加法の単位元（unit element, identity element）（零元）

c は x と無関係に存在

（3）任意の $x \in R$ に対して，$y \in R$ が存在して，$x + y = y + x = c$
（加法の逆元の存在）
  - $y = -x$ … x の加法の逆元（inverse element）

y は x に依存して存在

（4）任意の $x, y \in R$ に対して，$x + y = y + x$
（加法の交換則（commutative law））

24

環(続き)

- 代数系$(R,\ +,\ \cdot)$ は環である
  - 次の(1)～(7)が成り立つ.

(5)　任意の $x,\ y,\ z \in R$ に対して，$x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$
(乗法の結合則(associative law))

(6)　$e \in R$ が存在して，任意の $x \in R$ に対して，$x\cdot e = e\cdot x = x$
(乗法の単位元の存在)

- e … 乗法の単位元(unit element，identity element)

e は x と無関係に存在

(7)　任意の $x,\ y,\ z \in R$ に対して，
$x\cdot(y+z) = (x\cdot y)+(x\cdot z)$,
$(x+y)\cdot z = (x\cdot z)+(y\cdot z)$
(分配則(distributive law))

- 条件(1)～(7)　…　環の公理(axiom)

環(続き2)

- 代数系 R は環である
  - R 上に2つの演算(加法，乗法)が定義されている.
  (2つの演算は R 上で閉じている)
  - 次の(1)～(7)(環の公理)が成り立つ.

(1)　加法の結合則
(2)　加法の単位元の存在
(3)　加法の逆元の存在
(4)　加法の交換則
(5)　乗法の結合則
(6)　乗法の単位元の存在
(7)　分配則

- 乗法の交換則，乗法の逆元の存在は必ずしも成り立たない.

環(続き3)

- 環の単位元を明示するとき　…　$(R,\ +,\ \cdot,\ c,\ e)$

例：

- $(\mathbf{Z},\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1)$　…　整数環
- $(\mathbf{Q},\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1)$　…　有理数環
- $(\mathbf{R},\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1)$　…　実数環
- $(\mathbf{C},\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1)$　…　複素数環
- $(\mathbf{R}[x],\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1)$　…　多項式環
- $(\mathbf{Z}[i],\ +,\ \cdot,\ 0,\ 1)$　…　Gauss 整数環
  - $\mathbf{Z}[i] = \{\ x+yi \mid x,\ y \in \mathbf{Z}\ \}$

可換環(commutative ring)

- 代数系$(R,\ +,\ \cdot)$ は可換環である
  - $(R,\ +,\ \cdot)$ は環で，かつ，次の(8)が成り立つ.

(8)　任意の $x,\ y \in R$ に対して，$x\cdot y = y\cdot x$
(乗法の交換則(commutative law))

非可換環(続き)

例：　$(\ M(n),\ +,\ \cdot,\ O,\ E\ )$　…　行列環

- $M(n)$：すべての n 次実正方行列からなる集合$(n \geq 2)$
- $+$　：　行列の和，　$\cdot$　：　行列の積
- $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}$　，　$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

- 一般に，$A,\ B \in M(n)$に対して，$A\cdot B \neq B\cdot A$.

整数を法とする演算

- $p \in \mathbf{Z}$ を法とする
  完全剰余系 $\mathbf{Z}_p = \{0,\ 1,\ \dots,\ p-1\}$
- $+_p : \mathbf{Z}_p^{\,2} \to \mathbf{Z}_p$
  - $x +_p y = \mathrm{mod}(\ x+y,\ p\ )$

例：　$2 +_5 1 = 3$

- $\mathrm{mod}(2+1,\ 5) = 3$

- $\cdot_p : \mathbf{Z}_p^{\,2} \to \mathbf{Z}_p$
  - $x \cdot_p y = \mathrm{mod}(\ x\cdot y,\ p\ )$

例：$3 \cdot_5 4 = 2$

- $\mathrm{mod}(3\cdot 4,\ 5) = 2$

加算表$(p=5)$

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

乗算表$(p=5)$

$\cdot_5$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

定理

$p \in \mathbf{Z}$ に対して，次の（1），（2）が成り立つ．

（1）$x +_p y \equiv x + y \pmod{p}$

（2）$x \cdot_p y \equiv x \cdot y \pmod{p}$

- 一般に，$+_p$，$\cdot_p$ に関する式 P と，P に現れる $+_p$，$\cdot_p$ を それぞれ $+$，$\cdot$ で置き換えて得られる式 Q に対して， $P \equiv Q \pmod{p}$．

例：$(x +_p y) \cdot_p z \equiv (x + y) \cdot z \pmod{p}$

証明

$p \in \mathbf{Z}$ に対して，

（1）$x +_p y \equiv x + y \pmod{p}$

（2）$x \cdot_p y \equiv x \cdot y \pmod{p}$

（1）$x +_p y = \mathrm{mod}(x + y,\ p)$ だから，$q \in \mathbf{Z}$ が存在して，

$x + y = q \cdot p + (x +_p y)$．

ゆえに，$(x +_p y) - (x + y) = -q \cdot p$

$-q \in \mathbf{Z}$ だから，$x +_p y \equiv x + y \pmod{p}$

定理

$p \in \mathbf{Z}$ に対して，代数系 $(\mathbf{Z}_p,\ +_p,\ \cdot_p)$ は可換環である．

証明

$p \in \mathbf{Z}$ に対して，代数系 $(\mathbf{Z}_p,\ +_p,\ \cdot_p)$ は可換環である．

- （1）～（8）「可換環の公理が成り立つ」を示す．

（1）加法の結合則は成り立つ

- 「任意の $x, y, z \in \mathbf{Z}_p$ に対して，$(x +_p y) +_p z = x +_p (y +_p z)$」を示す．

任意の $x, y, z \in \mathbf{Z}_p$ に対して，

定理から，$(x +_p y) +_p z \equiv (x + y) + z \pmod{p}$

同様に，$x +_p (y +_p z) \equiv x + (y + z) \pmod{p}$

$(x + y) + z = x + (y + z)$ だから，

$(x +_p y) +_p z \equiv x +_p (y +_p z) \pmod{p}$．

$(x +_p y) +_p z$，$x +_p (y +_p z) \in \mathbf{Z}_p$ だから，

$(x +_p y) +_p z = x +_p (y +_p z)$．

証明（続き）

$p \in \mathbf{Z}$ に対して，代数系 $(\mathbf{Z}_p,\ +_p,\ \cdot_p)$ は可換環である．

（2）加法の単位元は存在する

- 「$c \in \mathbf{Z}_p$ が存在して，任意の $x \in \mathbf{Z}_p$ に対して，$x +_p c = c +_p x = x$」を示す．

$0 \in \mathbf{Z}_p$ を考える．

任意の $x \in \mathbf{Z}_p$ に対して，

$x +_p 0 = 0 +_p x = x$ だから，

0 は加法の単位元である．

加算表（$p=5$）

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

証明（続き2）

$p \in \mathbf{Z}$ に対して，代数系 $(\mathbf{Z}_p,\ +_p,\ \cdot_p)$ は可換環である．

（3）加法の逆元は存在する

- 「任意の $x \in \mathbf{Z}_p$ に対して，$y \in \mathbf{Z}_p$ が存在して，$x +_p y = y +_p x = c$」を示す．
- （2）から，$c = 0$．

任意の $x \in \mathbf{Z}_p = \{0, \ldots, p-1\}$ に対して，

$$-x = \begin{cases} p - x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

とおくと，$-x \in \mathbf{Z}_p$．

このとき，

$$x +_p (-x) = \begin{cases} \mathrm{mod}(x + (p - x),\ p) = 0 & (x \neq 0) \\ \mathrm{mod}(0 + 0,\ p) = 0 & (x = 0) \end{cases}$$

同様に，$(-x) +_p x = 0$．

ゆえに，$x +_p (-x) = (-x) +_p x = 0$ だから，

x に対して，$-x$ は加法の逆元である．

加算表（$p=5$）

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

証明（続き3）

$p \in \mathbf{Z}$ に対して，代数系（$\mathbf{Z}_p$, $+_p$, $\cdot_p$）は可換環である.

（4）　加法の交換則は成り立つ

- 「任意の x, $y \in \mathbf{Z}_p$ に対して，$x +_p y = y +_p x$」を示す.

任意の x, $y \in \mathbf{Z}_p$ に対して，

$x +_p y = \mathrm{mod}(x+y,\ p) = \mathrm{mod}\ (y+x,\ p) = y +_p x$

（5）　乗法の単位元は存在する

- 「$e \in \mathbf{Z}_p$ が存在して，任意の $x \in \mathbf{Z}_p$ に対して，$x \cdot_p e = e \cdot_p x = x$」を示す.

$1 \in \mathbf{Z}_p$ を考える.

任意の $x \in \mathbf{Z}_p$ に対して，

$x \cdot_p 1 = 1 \cdot_p x = x$ だから，1 は乗法の単位元である.

（6）　乗法の結合則は成り立つ

加法の結合則と同様に示せる.

37

証明（続き4）

$p \in \mathbf{Z}$ に対して，代数系（$\mathbf{Z}_p$, $+_p$, $\cdot_p$）は可換環である.

（7）　分配則は成り立つ

- 「任意の x, y, $z \in \mathbf{Z}_p$ に対して，$(x +_p y) \cdot_p z = (x \cdot_p z) +_p (y \cdot_p z)$，$x \cdot_p (y +_p z) = (x \cdot_p y) +_p (x \cdot_p z)$」を示す.

任意の x, y, $z \in \mathbf{Z}_p$ に対して，

定理から，$(x +_p y) \cdot_p z \equiv (x+y) \cdot z \pmod{p}$

同様に，$(x \cdot_p z) +_p (y \cdot_p z) \equiv x \cdot z + y \cdot z \pmod{p}$

$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ だから，

$(x +_p y) \cdot_p z \equiv (x \cdot_p z) +_p (y \cdot_p z) \pmod{p}$.

$(x +_p y) \cdot_p z$，$(x \cdot_p z) +_p (y \cdot_p z) \in \mathbf{Z}_p$ だから，

$(x +_p y) \cdot_p z = (x \cdot_p z) + (y \cdot_p z)$.

同様に，$x \cdot_p (y +_p z) = (x \cdot_p y) +_p (x \cdot_p z)$.

38

証明（続き5）

$p \in \mathbf{Z}$ に対して，代数系（$\mathbf{Z}_p$, $+_p$, $\cdot_p$）は可換環である.

（8）　乗法の交換則は成り立つ

加法の交換則と同様に示せる.

39

定理

環（R, $+$, $\cdot$）に対して，次の（1）～（3）が成り立つ.

（1）　加法の単位元は唯一である.

（2）　加法の逆元は唯一である.

（3）　乗法の単位元は唯一である.

40

証明

環（R, $+$, $\cdot$）に対して，

（1）　加法の単位元は唯一である.

- 単位元が 2 つあると仮定して，それらが一致することを示す.

c, $c' \in R$ はともに加法の単位元であると仮定する.

c' は加法の単位元だから，任意の $x \in R$ に対して，

$x + c' = c' + x = x$.

ここで，$x = c$ とおくと，$c + c' = c' + c = c$.

また，cは加法の単位元だから，任意の $x \in R$ に対して，

$x + c = c + x = x$.

ここで，$x = c'$ とおくと，$c' + c = c + c' = c'$.

ゆえに，$c = c'$.

41

証明（続き）

環（R, $+$, $\cdot$）に対して，

（2）　加法の逆元は唯一である.

- 逆元が 2 つあると仮定して，それらが一致することを示す.

任意の$x \in R$に対して，y, $y' \in R$はともに加法の逆元であるとする.

y は加法の逆元だから，$x + y = y + x = c$.

y' は加法の逆元だから，$x + y' = y' + x = c$.

このとき，

$y = y + c$

$= y + (x + y')$

$= (y + x) + y'$　（加法の結合則）

$= c + y'$

$= y'$

42

定理

環 $(R,\ +,\ \cdot,\ c,\ e)$ と任意の $x \in R$ に対して，
次の(1)，(2)が成り立つ．

(1)　$c \cdot x = x \cdot c = c$

(2)　$-(-x) = x$

43

証明

環 $(R,\ +,\ \cdot,\ c,\ e)$ と任意の $x \in R$ に対して，

(1)　$c \cdot x = x \cdot c = c$

$c \cdot x = c \cdot x + c$	（加法の単位元の性質）
$= c \cdot x + (c \cdot x + (-c \cdot x))$	（加法の逆元の性質）
$= (c \cdot x + c \cdot x) + (-c \cdot x)$	（加法の結合則）
$= (c + c) \cdot x + (-c \cdot x)$	（分配則）
$= c \cdot x + (-c \cdot x)$	（加法の単位元の性質）
$= c$	（加法の逆元の性質）

同様に，$x \cdot c = c$ を示すことができる．

44

証明（続き）

環 $(R,\ +,\ \cdot,\ c,\ e)$ と任意の $x \in R$ に対して，

(2)　$-(-x) = x$

$-(-x)$ は $-x$ の逆元である．

一方，加法の逆元の性質から，$x + (-x) = c$ ．

加法の交換則から，$(-x) + x = c$ ．

ゆえに，x は $-x$ の逆元である．

ところが，逆元は唯一だから，$-(-x) = x$．

45

まとめ

- 今回の講義
  - 多項式
  - 環
- 次回の講義
  - 環（続き）（教科書　pp.161-163）
  - 群（教科書　pp.168-170）
- 今回の演習
  - 多項式
  - 環

46