離散数学及び演習
講義 6　2014. 5.29（木）

約数・倍数
（教科書　pp.101-106, 113-116）

教科書・・・野崎昭弘：離散系の数学、近代科学社

整数論
（number theory）

28＝1＋2＋4＋7＋14

整数の基本的性質

Z：すべての整数からなる集合
N：すべての自然数からなる集合
$\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$：すべての非負整数からなる集合

任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ に対して，

- $m+n \in \mathbf{Z}$
- $m-n \in \mathbf{Z}$
  - $0-n = -n \in \mathbf{Z}$
- $m \cdot n \in \mathbf{Z}$
- 一般に，$m/n \notin \mathbf{Z}$
  - **Z** は加法，減法，乗法について閉じている．
  - **Z** は除法について閉じていない．
    - 剰余のある除法

除法定理（division theorem）

（1）任意の $m\in\mathbf{N}_0$, $n\in\mathbf{N}$ に対して，順序対 $(q, r)\in\mathbf{N}_0^2$ が唯一存在して，$m=q\cdot n+r$　$(0\leq r < n)$
（2）任意の $m, n\in\mathbf{Z}$ $(n\neq 0)$ に対して，順序対 $(q, r)\in\mathbf{Z}^2$ が唯一存在して，$m=q\cdot n+r$　$(0\leq r < |n|)$

- q … 商（quotient）
- r … 剰余（remainder）　　$r=\mathrm{mod}(m, n)$

例：　$117=2\cdot 51+15$
×　$117=1\cdot 51+66$　　$r=66\geq|51|$
×　$117=3\cdot 51+(-36)$　　$r=-36<0$

$-117=3\cdot(-51)+36$
× $-117=4\cdot(-51)+87$　　$r=87\geq|-51|$
× $-117=2\cdot(-51)+(-15)$　　$r=-15<0$

証明

（1）任意の $m\in\mathbf{N}_0$, $n\in\mathbf{N}$ に対して，順序対 $(q, r)\in\mathbf{N}_0^2$ が唯一存在して，$m=q\cdot n+r$　$(0\leq r < n)$
- a）「$(q, r)\in\mathbf{N}_0^2$ が存在する」を示す．
- b）「$(q, r)\in\mathbf{N}_0^2$ は唯一である」を示す．

---

a-1）$m<n$ のとき．このとき，$0\leq m<n$.
　$q=0$, $r=m$ とおくと，$m=0\cdot n+m$ だから，$m=q\cdot n+r$　$(0\leq r < n)$
a-2）$m\geq n$ のとき．m に関する帰納法により示す．
　任意の $k<m$ $(k\in\mathbf{N}_0)$ に対して，$(q', r')\in\mathbf{N}_0^2$ が存在して，
　$k=q'\cdot n+r'$　$(0\leq r' < n)$ と仮定する（帰納法の仮定）．
　ここで，$m'=m-n$ (≥ 0) とおくと，$m'-m=-n<0$ だから，$m'<m$.
　帰納法の仮定から，m' と n に対して，$(q', r')\in\mathbf{N}_0^2$ が存在して，
　$m'=q'\cdot n+r'$　$(0\leq r' < n)$.
　$m'=m-n=q'\cdot n+r'$ だから，$m=(q'+1)\cdot n+r'$.
　$q=q'+1$, $r=r'$ とおくと，$(q, r)\in\mathbf{N}_0^2$ で，$m=q\cdot n+r$　$(0\leq r < n)$.

証明（続き2）

（1）任意の $m\in\mathbf{N}_0$, $n\in\mathbf{N}$ に対して，順序対 $(q, r)\in\mathbf{N}_0^2$ が唯一存在して，$m=q\cdot n+r$　$(0\leq r < n)$
- b）「$(q, r)\in\mathbf{N}_0^2$ は唯一である」を示す．

---

b）任意の $m\in\mathbf{N}_0$, $n\in\mathbf{N}$ に対して，(q_1, r_1), $(q_2, r_2)\in\mathbf{N}_0^2$ $(q_1\neq q_2)$ が存在して，$m=q_1\cdot n+r_1$　$(0\leq r_1< n)$，$m=q_2\cdot n+r_2$　$(0\leq r_2< n)$ と仮定する．
b-1）$q_1>q_2$ のとき．
　このとき，$0=(q_1-q_2)\cdot n+(r_1-r_2)$．すなわち，$r_2-r_1=(q_1-q_2)\cdot n$.
　$q_1-q_2>0$ で，$q_1-q_2\in\mathbf{Z}$ だから，$q_1-q_2\geq 1$.
　$n>0$ だから，$(q_1-q_2)\cdot n\geq n$.
　一方，$r_2<n$, $r_1\geq 0$ だから，$r_2-r_1<n$.
　$r_2-r_1=(q_1-q_2)\cdot n<n$ となるから，これは矛盾．
b-2）$q_2>q_1$ のとき．同様に矛盾．
ゆえに，$q_1=q_2$.
このとき，$r_2-r_1=(q_1-q_2)\cdot n=0$ だから，$r_1=r_2$.

証明（続き3）

（1） 任意の $m \in \mathbf{N_0}$, $n \in \mathbf{N}$ に対して，順序対 $(q, r) \in \mathbf{N_0}^2$ が唯一存在して，$m = q \cdot n + r \quad (0 \leq r < n)$

（2） 任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ $(n \neq 0)$ に対して，順序対 $(q, r) \in \mathbf{Z}^2$ が唯一存在して，$m = q \cdot n + r \quad (0 \leq r < |n|)$

- a) 「$(q, r) \in \mathbf{Z}^2$ が存在する」を示す．
- b) 「$(q, r) \in \mathbf{Z}^2$ は唯一である」を示す．
- a-1) $n > 0$ のとき．
  - a-1-1) $m \geq 0$ のとき．　…（1）から明らか．
  - a-1-2) $m < 0$ のとき．
- a-2) $n < 0$ のとき．
  - a-2-1) $m \geq 0$ のとき．
  - a-2-2) $m < 0$ のとき．

（1）に帰着させる．

- b) （1）と同様に証明できる．

証明（続き4）

（2） 任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ $(n \neq 0)$ に対して，順序対 $(q, r) \in \mathbf{Z}^2$ が唯一存在して，$m = q \cdot n + r \quad (0 \leq r < |n|)$

- a) 「$(q, r) \in \mathbf{Z}^2$ が存在する」を示す．

---

a-1) $n > 0$ のとき．このとき，$|n| = n$．
a-1-1) $m \geq 0$ のとき．（1）から明らか．
a-1-2) $m < 0$ のとき．
$m' = -(m+1)$ とおくと，$m < 0$ だから，$m' > -1$．
$m' \in \mathbf{Z}$ だから，$m' \geq 0$．
（1）から，m', n に対して，$(q', r') \in \mathbf{Z}^2$ が存在して，$m' = q' \cdot n + r'$
$(0 \leq r' < n)$
このとき，$m = -m' - 1 = -(q' \cdot n + r') - 1 = (-q' - 1) \cdot n + (n - 1 - r')$．
ここで，$q = -q' - 1$，$r = n - 1 - r'$ とおくと，$(q, r) \in \mathbf{Z}^2$ で，$m = q \cdot n + r$．
また，$r' \in \mathbf{Z}$ だから，$0 \leq r' \leq n - 1$．
ゆえに，$0 \leq n - 1 - r' \leq n - 1$．
したがって，$0 \leq r \leq n - 1$ だから，$0 \leq r < n = |n|$．

証明（続き5）

（2） 任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ $(n \neq 0)$ に対して，順序対 $(q, r) \in \mathbf{Z}^2$ が唯一存在して，$m = q \cdot n + r \quad (0 \leq r < |n|)$

- a) 「$(q, r) \in \mathbf{Z}^2$ が存在する」を示す．

---

a-2) $n < 0$ のとき．このとき，$|n| = -n > 0$．
a-2-1) $m \geq 0$ のとき．
$n' = -n$ とおくと，$n' > 0$．
（1）から，m, n' に対して組 $(q', r') \in \mathbf{Z}^2$ が存在して，$m = q' \cdot n' + r'$
$(0 \leq r' < n')$
このとき，$m = q' \cdot (-n) + r' = (-q') \cdot n + r'$．
ここで，$q = -q'$，$r = r'$ とおくと，$(q, r) \in \mathbf{Z}^2$ で，$m = q \cdot n + r$．
さらに，$n' = -n = |n|$ だから，$0 \leq r < |n|$．

証明（続き6）

（2） 任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ $(n \neq 0)$ に対して，順序対 $(q, r) \in \mathbf{Z}^2$ が唯一存在して，$m = q \cdot n + r \quad (0 \leq r < |n|)$

- a) 「$(q, r) \in \mathbf{Z}^2$ が存在する」を示す．

---

a-2) $n < 0$ のとき．このとき，$|n| = -n > 0$．
a-2-2) $m < 0$ のとき．
$m' = -(m+1)$，$n' = -n$ とおくと，$m' \geq 0$，$n' > 0$．
（1）から，m', n' に対して組 $(q', r') \in \mathbf{Z}^2$ が存在して，$m' = q' \cdot n' + r'$
$(0 \leq r' < n')$
このとき，$m = -m' - 1 = -(q' \cdot (-n) + r') - 1$
$= (q' + 1) \cdot n + (-(n + r' + 1))$．
ここで，$q = q' + 1$，$r = -(n + r' + 1)$ とおくと，$(q, r) \in \mathbf{Z}^2$ で，$m = q \cdot n + r$．
さらに，$0 \leq r' < n'$ だから，$1 \leq r' + 1 < n' + 1 = -n + 1$．
ゆえに，$0 < r' + 1 \leq -n$ だから，$0 \leq -(n + r' + 1) < -n = |n|$．
すなわち，$0 \leq r < |n|$．

約数・倍数

$n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，

- k は n の約数（divisor）である
  n は k の倍数（multiple）である
  k は n を割り切る（divide）（ n は k で割り切れる（divisible））
  … $k \mid n$
  - ある $q \in \mathbf{Z}$ が存在して，$n = q \cdot k$

例：

- $19 \mid 38$　（19は38の約数，38は19の倍数）
  - $38 = 2 \cdot 19$
- $-19 \mid 38$　（−19は38の約数，38は−19の倍数）
  - $38 = (-2) \cdot (-19)$

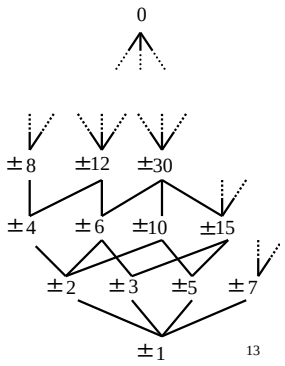
約数・倍数（続き）

$n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，

- k は n の約数（divisor）である，n は k の倍数（multiple）である
  k は n を割り切る（divide）（ n は k で割り切れる（divisible））… $k \mid n$
  - ある $q \in \mathbf{Z}$ が存在して，$n = q \cdot k$
- 任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して，$n = n \cdot 1$，$n = (-n) \cdot (-1)$　$(\pm n \in \mathbf{Z})$
  - ± 1 は任意の $n \in \mathbf{Z}$ の約数である，任意の $n \in \mathbf{Z}$ は ± 1 の倍数である
    ± 1 は任意の $n \in \mathbf{Z}$ を割り切る（ $\pm 1 \mid n$ ）
- 任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対して，$0 = 0 \cdot k$　（$0 \in \mathbf{Z}$）
  - 任意の $k \in \mathbf{Z}$ は 0 の約数である，　0 は任意の $k \in \mathbf{Z}$ の倍数である
    任意の $k \in \mathbf{Z}$ は 0 を割り切る （ $k \mid 0$ ）
  - 特に，0 は 0 の約数である，　0 は 0 の倍数である
    0 は 0 を割り切る （ $0 \mid 0$ ）
- 任意の $n \in \mathbf{Z}$ （ $n \neq 0$ ）に対して，$n = q \cdot 0$ となる $q \in \mathbf{Z}$ は存在しない
  - $n \neq 0$ に対して，$0 \mid n$ とはならない．

整除関係（divisibility relation）

- $\mathbf{Z}$ 上の整除関係 ｜ （｜ $\subseteq \mathbf{Z}^2$）
  - $k \mid n$ iff ある $q \in \mathbf{Z}$ が存在して，$n = q \cdot k$
  - ｜は反射的かつ推移的である
  - ｜は反対称的でない
    $1 \mid -1$かつ$-1 \mid 1$であるが，$1 \neq -1$
- $\mathbf{N}_0$ 上の整除関係 ｜ （｜ $\subseteq \mathbf{N}_0^2$）
  - ｜は半順序
- 1 は $\mathbf{N}_0$ 上の整除関係｜の最小元
  - 任意の $n \in \mathbf{N}_0$ に対して，$1 \mid n$.
- 0 は $\mathbf{N}_0$ 上の整除関係｜の最大元
  - 任意の $k \in \mathbf{N}_0$ に対して，$k \mid 0$.



13

定理

任意の $m, n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，次の(1)～(4)が成り立つ．

(1) $m \mid m$.
(2) $m \mid n$ かつ $n \mid m$ ならば，$\mid m \mid = \mid n \mid$.
(3) $m \mid n$ かつ $n \mid k$ ならば，$m \mid k$.
(4) $k \mid m$ かつ $k \mid n$ ならば，任意の $a, b \in \mathbf{Z}$ に対して，
$k \mid am + bn$.

特に，$m, n \in \mathbf{N}_0$ のとき，
(2') $m \mid n$ かつ $n \mid m$ ならば，$m = n$.

- 整除関係｜は $\mathbf{N}_0$ 上の半順序である．

14

証明

(1) $m \mid m$.
(2) $m \mid n$ かつ $n \mid m$ ならば，$\mid m \mid = \mid n \mid$.

---

(1) $1 \in \mathbf{Z}$ に対して，$m = 1 \cdot m$ だから，明らか．
(2) $m \mid n$ だから，$q_1 \in \mathbf{Z}$ が存在して，$n = q_1 \cdot m$.
$n \mid m$ だから，$q_2 \in \mathbf{Z}$ が存在して，$m = q_2 \cdot n$.
ゆえに，$n = q_1 q_2 n$.
a) $n \neq 0$ のとき．$q_1 q_2 = 1$.
$q_1, q_2 \in \mathbf{Z}$ だから，$q_1 = q_2 = 1$ または $q_1 = q_2 = -1$.
すなわち，$m = n$ または $m = -n$ だから，$\mid m \mid = \mid n \mid$.
b) $n = 0$ のとき．$m = q_2 \cdot 0 = 0$.
ゆえに，$m = n = 0$ だから，$\mid m \mid = \mid n \mid$.

15

証明（続き）

(3) $m \mid n$ かつ $n \mid k$ ならば，$m \mid k$.
- 「ある $q \in \mathbf{Z}$ が存在して，$k = q \cdot m$ 」を示す．

$m \mid n$ だから，$q_1 \in \mathbf{Z}$ が存在して，$n = q_1 \cdot m$.
$n \mid k$ だから，$q_2 \in \mathbf{Z}$ が存在して，$k = q_2 \cdot n$.
ゆえに，$k = q_2 \cdot q_1 \cdot m$.
$q_2 \cdot q_1 \in \mathbf{Z}$ だから，$m \mid k$.

16

証明（続き2）

(4) $k \mid m$ かつ $k \mid n$ ならば，任意の $a, b \in \mathbf{Z}$ に対して，
$k \mid am + bn$.
- 「ある $q \in \mathbf{Z}$ が存在して，$am + bn = q \cdot k$ 」を示す．

$k \mid m$ だから，$q_1 \in \mathbf{Z}$ が存在して，$m = q_1 \cdot k$.
$k \mid n$ だから，$q_2 \in \mathbf{Z}$ が存在して，$n = q_2 \cdot k$.
ゆえに，$am + bn = aq_1 k + bq_2 k = (aq_1 + bq_2)k$.
$aq_1 + bq_2 \in \mathbf{Z}$ だから，$k \mid am + bn$.

17

定理

$n, m \in \mathbf{Z}$ に対して，
$m \neq 0$ かつ $n \mid m$ ならば，$\mid n \mid \leq \mid m \mid$.

特に，$n, m \in \mathbf{N}$ に対して，$n \mid m$ ならば，$n \leq m$.

18

証明

$n, m \in \mathbf{Z}$ に対して，$m \neq 0$ かつ $n \mid m$ ならば，$|n| \leq |m|$．

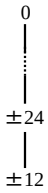
$n \mid m$ だから，$q \in \mathbf{Z}$ が存在して，$m = q \cdot n$．
$m \neq 0$ だから，$q \neq 0$ かつ $n \neq 0$．
ゆえに，$1 \leq |q|$．
$|n| \geq 0$ だから，$|n| \leq |q| \cdot |n| = |q \cdot n| = |m|$．

公倍数

$n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，

- $m \in \mathbf{Z}$ は n, k の公倍数（common multiple）である
  - $n \mid m$ かつ $k \mid m$.
- $m \in \mathbf{N}_0$ は n, k の最小公倍数（least common multiple）である
  … $m = \mathrm{lcm}(n, k) = [n, k]$
  - m は n, k の公倍数で，かつ，n, k の任意の公倍数 m' に対して，
    $m \mid m'$（m' は m の倍数）．
  - m は n, k のすべての非負公倍数からなる集合上での
    整除関係に関する最小元

例：4 の倍数　：　…, −12, −8, −4, 0, 4, 8, 12, …
　　6 の倍数　：　…, −18, −12, −6, 0, 6, 12, 18, …
- 4 と 6 の公倍数　：　…, −24, −12, 0, 12, 24, …
- 4 と 6 の最小公倍数　：12（$\in \mathbf{N}_0$）
  - $12 \mid 0$, $12 \mid 12$, $12 \mid 24$



定理

- 任意の $n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，$\mathrm{lcm}(n, k) = \mathrm{lcm}(k, n)$．
- 任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して，$\mathrm{lcm}(n, 0) = 0$.
  - 0 は n, 0 の唯一の公倍数で，かつ，$0 \mid 0$.

- $n, k \in \mathbf{N}$ の最小公倍数は n, k の公倍数の中で
  （大小関係に関して）最小である．
  - m を n, k の任意の公倍数とすると，
    $\mathrm{lcm}(n, k) \mid m$，かつ，$m > 0$，$\mathrm{lcm}(n, k) > 0$ だから，
    定理より，$\mathrm{lcm}(n, k) \leq m$.

公倍数（続き）

$k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{Z}$ に対して，

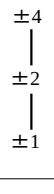
- $m \in \mathbf{Z}$ は $k_1, \ldots, k_n$ の公倍数である
  - $k_1 \mid m$，…，$k_n \mid m$.
- $m \in \mathbf{N_0}$ は $k_1, \ldots, k_n$ の最小公倍数である
  … $m = \mathrm{lcm}(k_1, \ldots, k_n) = [k_1, \ldots, k_n]$
  - m は $k_1, \ldots, k_n$ の公倍数で，かつ，$k_1, \ldots, k_n$ の任意の
    公倍数 m' に対して，$m \mid m'$.

公約数

$n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，

- $d \in \mathbf{Z}$ は n, k の公約数（common divisor）である
  - $d \mid n$ かつ $d \mid k$.
- $d \in \mathbf{N}_0$ は n, k の最大公約数（greatest common divisor）である
  … $d = \gcd(n, k) = (n, k)$
  - d は n, k の公約数で，かつ，n, k の任意の公約数 d' に対して，
    $d' \mid d$　（d' は d の約数）．
  - d は n, k のすべての非負公約数からなる集合上での
    整除関係に関する最大元

例：8 の約数　：　−8, −4, −2, −1, 1, 2, 4, 8
　　12の約数　：　−12, −6, −4, −3, −2, −1, 1, 2, 3, 4, 6, 12
- 8 と12の公約数　：　−4, −2, −1, 1, 2, 4
- 8 と12の最大公約数　：　4　（$\in \mathbf{N}_0$）
  - $1 \mid 4$, $2 \mid 4$, $4 \mid 4$



定理

- 任意の $n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，$\gcd(n, k) = \gcd(k, n)$．
- 任意の $n \in \mathbf{Z}$ に対して，$\gcd(n, 0) = |n|$．
  特に，$\gcd(0, 0) = 0$.
  - 任意の整数は 0 の約数である．
    ゆえに，n, 0 の公約数は n の約数である．
    $|n|$ は n, 0 の公約数で，かつ，n, 0 の任意の公約数 d' に対して，
    $d' \mid |n|$.

- $n, k \in \mathbf{N}$ の最大公約数は n, k の公約数の中で
  （大小関係に関して）最大である．
  - d を n, k の任意の公約数とすると，
    $d \mid \gcd(n, k)$ かつ $\gcd(n, k) > 0$，$d > 0$ だから，
    定理より，$d \leq \gcd(n, k)$.

公約数（続き）

$k_1, \ldots, k_n \in \mathbf{Z}$ に対して，

- $d \in \mathbf{Z}$ は $k_1, \ldots, k_n$ の公約数である
  - $d \mid k_1, \ldots, d \mid k_n$.
- $d \in \mathbf{N_0}$ は $k_1, \ldots, k_n$ の最大公約数である

  … $d = \gcd(k_1, \ldots, k_n) = (k_1, \ldots, k_n)$
  - d は $k_1, \ldots, k_n$ の公約数で，かつ，$k_1, \ldots, k_n$ の任意の公約数 d' に対して，$d' \mid d$.

互いに素

- $n, k \in \mathbf{Z}$ は互いに素である

  （relatively prime, coprime）
  - $\gcd(n, k) = 1$

定理

任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ に対して，$x, y \in \mathbf{Z}$ が存在して，
$mx + ny = \gcd(m, n)$.

例：$\gcd(10, 15) = 5 = 10 \cdot (-1) + 15 \cdot 1$
$\gcd(30, 77) = 1 = 30 \cdot 18 + 77 \cdot (-7)$

証明

任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ に対して，$x, y \in \mathbf{Z}$ が存在して，
$mx + ny = \gcd(m, n)$.

$mu + nv$ $(u, v \in \mathbf{Z})$という形の最小の自然数を $d = mx + ny$ とする．
このとき，$x, y \in \mathbf{Z}$.
- $d = \gcd(m, n)$を示す．
- 1)「$d \mid m$ かつ $d \mid n$」を示す．
- 2)「m と n の任意の公約数 d' に対して，$d' \mid d$」を示す．

1) $d \mid m$ でないと仮定する．
このとき，除法定理から，$q, r \in \mathbf{Z}$ が存在して，$m = q \cdot d + r$ $(0 < r < d)$.
ゆえに，$r = m - q \cdot d = m - q \cdot (mx + ny) = m(1 - q \cdot x) + n(-q \cdot y)$.
$1 - q \cdot x$，$-q \cdot y \in \mathbf{Z}$ だから，r は $mu + nv$ という形の自然数である．
ところが，$r < d$ だから，d の選び方に矛盾する．
ゆえに，$d \mid m$.
同様に，$d \mid n$.

証明（続き）

任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ に対して，$x, y \in \mathbf{Z}$ が存在して，
$mx + ny = \gcd(m, n)$.

$mu + nv$ $(u, v \in \mathbf{Z})$という形の最小の自然数を $d = mx + ny$ とする．
- $d = \gcd(m, n)$を示す．
- 2)「m と n の任意の公約数 d' に対して，$d' \mid d$」を示す．

2) d' は m と n の公約数だから，$m', n' \in \mathbf{Z}$ が存在して，
$m = m'd'$ かつ $n = n'd'$.
ゆえに，$d = mx + ny = m'd'x + n'd'y = (m'x + n'y)d'$.
$m'x + n'y \in \mathbf{Z}$ だから，$d' \mid d$.
以上から，$d = \gcd(m, n)$.

系

任意の $m, n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，
$\gcd(m, n) = 1$ かつ $m \mid nk$ ならば，$m \mid k$.

証明

任意の $m, n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，
$\gcd(m, n)=1$ かつ $m \mid nk$ ならば，$m \mid k$.

定理から，$m, n \in \mathbf{Z}$ に対して，$x, y \in \mathbf{Z}$ が存在して，
$mx+ny=\gcd(m, n)=1$.
このとき，$k(mx+ny)=k$.
一方，$k(mx+ny)= mkx+nky$.
$m \mid nk$ だから，$m \mid nky$.
また，明らかに，$m \mid mkx$.
ゆえに，定理より $m \mid mkx + nky$ だから，$m \mid k(mx+ny)$.
$mx+ny=1$ だから，$m \mid k$.

定理

任意の $n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，$\gcd(n, k)\cdot\mathrm{lcm}(n, k)=n\cdot k$.

証明

任意の $n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，$\gcd(n, k)\cdot\mathrm{lcm}(n, k)=n\cdot k$.

- a)　$n=0$ または $k=0$ のとき.
- b)　$n, k \neq 0$ のとき.

---

a)　$n=0$ または $k=0$ のとき.
$\mathrm{lcm}(n, k)=0$, $n\cdot k=0$ だから，$\gcd(n, k)\cdot\mathrm{lcm}(n, k)=n\cdot k$.

証明（続き）

任意の $n, k \in \mathbf{Z}$ に対して，$\gcd(n, k)\cdot\mathrm{lcm}(n, k)=n\cdot k$.

b)　$n, k \neq 0$ のとき.
$\gcd(n, k)=d$ とおく．すなわち，$d\cdot\mathrm{lcm}(n, k)=n\cdot k$ を示す.
このとき，$q, q' \in \mathbf{Z}$ が存在して，$n=q\cdot d$ かつ $k=q'\cdot d$.
（$\gcd(q, q')=1$）
ゆえに，$n\cdot k = q\cdot d\cdot q'\cdot d = d\cdot qq'd$.
$qq'd = m$ とおく．すなわち，$n\cdot k=d\cdot m$.

- $m=\mathrm{lcm}(n, k)$を示す.
- b-1)「$n \mid m$ かつ $k \mid m$」を示す.
- b-2)「n, k の任意の公倍数 m' に対して，$m \mid m'$」を示す.

---

b-1) $m = q'\cdot qd = q'\cdot n$ だから，$n \mid m$.
また，$m = q\cdot q'd = q\cdot k$ だから，$k \mid m$.

証明（続き2）

b)　$n, k \neq 0$ のとき.
$\gcd(n, k)=d$ とおく．すなわち，$d\cdot\mathrm{lcm}(n, k)=n\cdot k$ を示せばよい.
このとき，$q, q' \in \mathbf{Z}$ が存在して，$n=q\cdot d$ かつ $k=q'\cdot d$.
ゆえに，$n\cdot k = q\cdot d\cdot q'\cdot d = d\cdot qq'd$.
$qq'd = m$ とおく．すなわち，$n\cdot k=d\cdot m$.

- b-2)「n, k の任意の公倍数 m' に対して，$m \mid m'$」を示す.

---

b-2) n, k の任意の公倍数を m' とする.
このとき，$q_1 \in \mathbf{Z}$ が存在して，$m' = q_1\cdot n = q_1\cdot q\cdot d$.
一方，$q_2 \in \mathbf{Z}$ が存在して，$m' = q_2\cdot k = q_2\cdot q'\cdot d$.
ゆえに，$q_1\cdot q\cdot d = q_2\cdot q'\cdot d$.
$d \neq 0$ だから，$q_1\cdot q = q_2\cdot q'$ であり，$q' \mid q_1\cdot q$.
ところが，$\gcd(q, q')=1$ だから，$q' \mid q_1$.
ゆえに，$q'\cdot n \mid q_1\cdot n$ だから，$q'\cdot q\cdot d \mid q_1\cdot n$.
すなわち，$m \mid m'$.

定理（Euclid の互除法の原理）

任意の $m, n, q, r \in \mathbf{Z}$ に対して，$m=qn+r$ ならば，
$\gcd(m, n)=\gcd(n, r)$.

例：　$\gcd(117, 51)$

$=\gcd(51, 15)$　…　$117=2\cdot 51+15$
$=\gcd(15, 6)$　…　$51=3\cdot 15+6$
$=\gcd(6, 3)$　…　$15=2\cdot 6+3$
$=\gcd(3, 0)$　…　$6=2\cdot 3+0$
$=3$　…　定理

Euclid
（ギリシャ，330?-275? B.C.）

Euclid の互除法（Euclidean Algorithm）

- 入力：$m, n \in \mathbf{Z}$
- 出力：$\gcd(m, n)$
- 手順：

$\gcd(m, n)$
$= \gcd(n, r_1)$　　$r_1 = \mathrm{mod}(m, n)$　$(0 \leq r_1 < |n|)$
$= \gcd(r_1, r_2)$　　$r_2 = \mathrm{mod}(n, r_1)$　$(0 \leq r_2 < |r_1| = r_1)$
$= \gcd(r_2, r_3)$　　$r_3 = \mathrm{mod}(r_1, r_2)$　$(0 \leq r_3 < |r_2| = r_2)$
：
$= \gcd(r_{k-1}, r_k)$　　$r_k = \mathrm{mod}(r_{k-2}, r_{k-1})$
$(0 \leq r_k < |r_{k-1}| = r_{k-1})$
$= \gcd(r_k, 0)$　　$0 = \mathrm{mod}(r_{k-1}, r_k)$
$= r_k$

37

証明

任意の $m, n, q, r \in \mathbf{Z}$ に対して，$m = qn + r$ ならば，$\gcd(m, n) = \gcd(n, r)$.

- 「m と n のすべての非負公約数からなる集合と，n と r のすべての非負公約数からなる集合は等しい（$D_{m,n} = D_{n,r}$）」を示す．
- 等しい集合上の整除関係に関する最大元は等しい．

---

m と n のすべての非負公約数からなる集合を $D_{m,n}$ とし，
n と r のすべての非負公約数からなる集合を $D_{n,r}$ とする．
任意の $d \in D_{m,n}$ に対して，$d \mid m$ かつ $d \mid n$ だから，$d \mid m - qn$.
ゆえに，$d \mid r$ だから，d は n と r の非負公約数でもあり，$d \in D_{n,r}$.
したがって，$D_{m,n} \subseteq D_{n,r}$.
一方，任意の $d' \in D_{n,r}$ に対して，$d' \mid n$ かつ $d' \mid r$ だから，$d' \mid qn + r$.
ゆえに，$d' \mid m$ だから，d' は m と n の非負公約数でもあり，$d' \in D_{m,n}$.
したがって，$D_{n,r} \subseteq D_{m,n}$.
以上から，$D_{m,n} = D_{n,r}$ だから，$\gcd(m, n) = \gcd(n, r)$.

38

Euclid の互除法の実現

- 入力：$m, n \in \mathbf{Z}$
- 出力：$\gcd(m, n)$
- 手順：

```
procedure gcd(m, n);
begin
    if n=0 then return(|m|);
    s := m;
    s' := n;
    while s' ≠ 0 do
      begin
          t := s;
          s := s';
          s' := mod(t, s');
      end;
   return(s);
end
```

39

Euclid の互除法の実現（続き）

- 入力：$m, n \in \mathbf{Z}$
- 出力：$\gcd(m, n)$
- 手順：

```
procedure gcd(m, n);
begin
  if n=0
  then return(|m|)
  else return(gcd(n, mod(m, n)))
end
```

再帰呼び出し

40

定理（停止性と正当性，計算量）

- Euclid の互除法は，有限回の計算ステップで停止し，任意の $m, n \in \mathbf{Z}$ に対して，$\gcd(m, n)$ を正しく計算する．
- $m, n \in \mathbf{Z}$ $(m \geq n)$ に対して，Euclid の互除法は最大 $\lceil \log_\phi(n) \rceil$ 回以下の除法で計算を停止する．

  ただし，$\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

  - $u \in \mathbf{R}$ に対して，$\lceil u \rceil$ は u の小数点以下を切り上げた整数．
- $m, n \in \mathbf{Z}$ $(m \geq n)$ に対して，n が10進 s 桁ならば，Euclid の互除法は最大 $5s$ 回以下の除法で計算を停止する．

41

まとめ

- 今回の講義
  - 約数・倍数
- 次回の講義
  - 素数（教科書　pp.106-113）
- 今回の演習
  - なし

42