離散数学及び演習
講義 5　2014. 5.15（木）

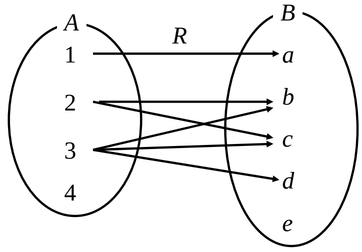
関数
（教科書　pp.3-5，26-28）

教科書・・・野崎昭弘：離散系の数学、近代科学社

2 項関係（復習）

- 集合 A から集合 B への 2 項関係 R
  - $R \subseteq A \times B$

例：$A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{a, b, c, d, e\}$
$R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, b), (3, c), (3, d)\}$
$\subseteq A \times B$



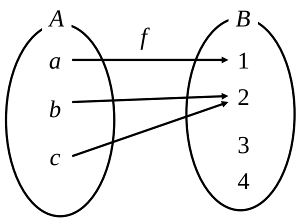
2

関数（function）

- 集合 A から集合 B への関数（写像（mapping））f
  - $f \subseteq A \times B$，かつ，任意の $x \in A$ に対して，$y \in B$ が唯一存在して，$(x, y) \in f$ である．

例：$A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$
$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\} \subseteq A \times B$

- 関数 $f \subseteq A \times B$
  … $f : A \to B$



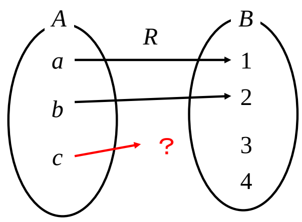
3

関数（続き）

- 関数 $f : A \to B$
  - $f \subseteq A \times B$，かつ，任意の $x \in A$ に対して，$y \in B$ が唯一存在して，$(x, y) \in f$ である．

例：$A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$
$R = \{(a, 1), (b, 2)\} \subseteq A \times B$

- $c \in A$ に対して，$(c, y) \in R$ となる $y \in B$ が存在しないので，R は関数ではない．



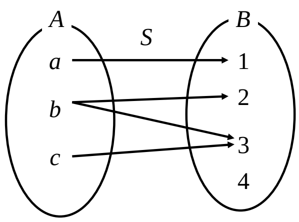
4

関数（続き2）

- 関数 $f : A \to B$
  - $f \subseteq A \times B$，かつ，任意の $x \in A$ に対して，$y \in B$ が唯一存在して，$(x, y) \in f$ である．

例：$A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$
$S = \{(a, 1), (b, 3), (b, 2), (c, 3)\} \subseteq A \times B$

- $b \in A$ に対して，$(b, y) \in S$ となる $y \in B$ は唯一でないので，S は関数ではない．



5

関数（続き3）

- $(x, y) \in f$，$x f y$　…　$y = f(x)$
- 関数 $f : A \to A$　…　集合 A 上の関数

- $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$，$f : A \to B$
  - $f = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ f(a_1) & \cdots & f(a_n) \end{bmatrix}$

例：$f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2)\}$
$= \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

6

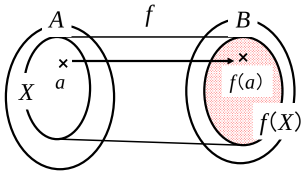
n 変数関数（n-ary function）

- 集合 $A_1, \ldots, A_n$ から集合 B への n 変数関数
  - $f \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n \times B$,
  かつ，任意の$(x_1, \ldots, x_n) \in A_1 \times \ldots \times A_n$ 対して，
  $y \in B$ が唯一存在して，$(x_1, \ldots, x_n, y) \in f$ である．
  … $f : A_1 \times \ldots \times A_n \to B$
- $(x_1, \ldots, x_n, y) \in f$，$y = f((x_1, \ldots, x_n))$
  … $y = f(x_1, \ldots, x_n)$

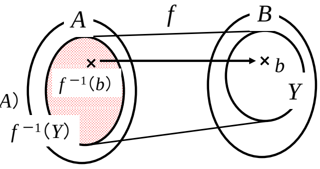
7

像，逆像

関数 $f : A \to B$ に対して，
- f による $a \in A$ の 像(image)（値(value)）
  - $f(a)$
  - a … fの引数(argument)
- f による $b \in B$ の 逆像（原像）
  (inverse image) … $f^{-1}(b)$
  - $b = f(a)$ であるような $a \in A$



- f による $X \subseteq A$ の 像
  - $f(X) = \{ f(x) \mid x \in X \}$ $(\subseteq B)$
- fによる $Y \subseteq B$ の 逆像（原像）
  - $f^{-1}(Y) = \{ x \mid f(x) \in Y \}$ $(\subseteq A)$



8

定理

集合 $X, X_1, X_2 \subseteq A$，$Y, Y_1, Y_2 \subseteq B$ と関数 $f : A \to B$ に対して，
次の(1)～(5)が成り立つ．

(1)　$X \subseteq f^{-1}(f(X))$，
　　$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

(2)　$X_1 \subseteq X_2$ ならば，$f(X_1) \subseteq f(X_2)$，
　　$Y_1 \subseteq Y_2$ ならば，$f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$

(3)　$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$，
　　$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$

(4)　$f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$，
　　$f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$

(5)　$f(X_1) - f(X_2) \subseteq f(X_1 - X_2)$，
　　$f^{-1}(Y_1 - Y_2) = f^{-1}(Y_1) - f^{-1}(Y_2)$

9

証明

集合 $X \subseteq A$，$Y \subseteq B$ と関数 $f : A \to B$ に対して，

(1)　$X \subseteq f^{-1}(f(X))$，
　　$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$
- 「任意の $x \in X$ に対して，$x \in f^{-1}(f(X))$」を示す．
- 「任意の $y \in f(f^{-1}(Y))$ に対して，$y \in Y$」を示す．

任意の $x \in X$ に対して，$f(x) \in f(X)$．
ゆえに，$x \in f^{-1}(f(X))$だから，$X \subseteq f^{-1}(f(X))$．
- $f^{-1}(f(X)) = \{ x \mid f(x) \in f(X) \}$

一方，任意の $y \in f(f^{-1}(Y))$ に対して，$x \in f^{-1}(Y)$が存在して，
$y = f(x)$．
$x \in f^{-1}(Y)$ だから，$f(x) \in Y$．すなわち，$y \in Y$．
- $f^{-1}(Y) = \{ x \mid f(x) \in Y \}$

ゆえに，$f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$．

10

証明（続き）

集合$Y_1, Y_2 \subseteq B$ と関数 $f : A \to B$ に対して，

(3)　$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$
- a)「$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$」と
- b)「$f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$」の両方を示す．
- a)「任意の $x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$ に対して，$x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$」を示す．

---

a)任意の $x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$ に対して，$f(x) \in Y_1 \cup Y_2$ だから，
$f(x) \in Y_1$ または $f(x) \in Y_2$．
- $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = \{ x \mid f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \}$

ゆえに，$x \in f^{-1}(Y_1)$または $x \in f^{-1}(Y_2)$だから，
$x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$．
- $f^{-1}(Y_1) = \{ x \mid f(x) \in Y_1 \}$，$f^{-1}(Y_2) = \{ x \mid f(x) \in Y_2 \}$

したがって，$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$．

11

証明（続き2）

集合$Y_1, Y_2 \subseteq B$ と関数 $f : A \to B$ に対して，

(3)　$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$
- a)「$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$」と
- b)「$f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$」の両方を示す．
- b)「任意の $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$に対して，$x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$」を示す．

---

b)任意の $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$に対して，$x \in f^{-1}(Y_1)$または
$x \in f^{-1}(Y_2)$．
ゆえに，$f(x) \in Y_1$ または $f(x) \in Y_2$ だから，$f(x) \in Y_1 \cup Y_2$．
- $f^{-1}(Y_1) = \{ x \mid f(x) \in Y_1 \}$，$f^{-1}(Y_2) = \{ x \mid f(x) \in Y_2 \}$

このとき，$x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$．
- $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = \{ x \mid f(x) \in Y_1 \cup Y_2 \}$

したがって，$f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2) \subseteq f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$．

a)，b)から，$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$．

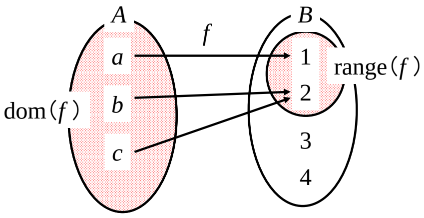
12

関数の定義域，値域

関数 $f : A \to B$に対して，

- f の定義域（domain）
  - $\mathrm{dom}(f) = \{ x \in A \mid$ ある $y \in B$ に対して，$y = f(x) \}$
- f の値域（range）
  - $\mathrm{range}(f) = \{ y \in B \mid$ ある $x \in A$ に対して，$y = f(x) \}$
    $(= \{ f(x) \mid x \in A \} = f(A))$

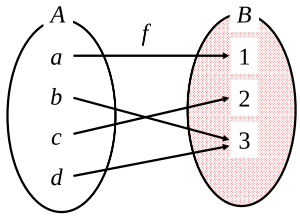
例：



全射（surjection）

- 関数 $f : A \to B$ は全射である
  （上への関数（onto function）である）
  - 任意の $y \in B$ に対して，ある $x \in A$ が存在して，$y = f(x)$.

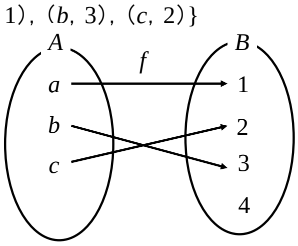
例：$A = \{ a, b, c, d \}$, $B = \{ 1, 2, 3 \}$
$f = \{ (a, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 3) \}$



単射（injection）

- 関数 $f : A \to B$ は単射である
  （1対1関数（one-to-one function）である）
  - 任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して，$x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$.
    - 任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して，$f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$.

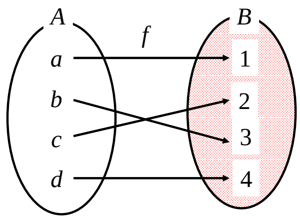
例：$A = \{ a, b, c \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$f = \{ (a, 1), (b, 3), (c, 2) \}$



全単射（bijection）

- 関数 $f : A \to B$ は全単射である
  - f は全射かつ単射である

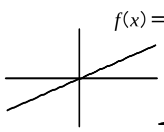
例：$A = \{ a, b, c, d \}$, $B = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$f = \{ (a, 1), (b, 3), (c, 2), (d, 4) \}$

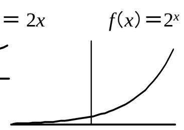


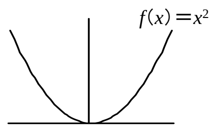
全射，単射，全単射（続き）

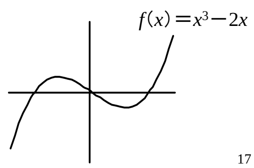
R … すべての実数からなる集合

- 例1：$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,　$f(x) = 2x$
  - f は全単射である.
- 例2：$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,　$f(x) = 2^x$
  - f は単射であるが，全射ではない.
- 例3：$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,　$f(x) = x^2$
  - f は単射でなく，全射でもない.
- 例4：$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,　$f(x) = x^3 - 2x$
  - f は単射でないが，全射である.



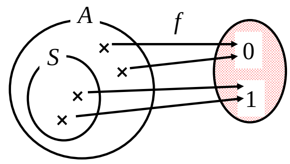






全射，単射，全単射（続き2）

- 例：集合 A
  $S \subseteq A$,　$|A| \geq 3$,　$S \neq \phi$,　$A - S \neq \phi$
  $f : A \to \{ 0, 1 \}$,
  $$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in S) \\ 0 & (x \notin S) \end{cases}$$
  - f は単射でないが，全射である.



置換(permutation)

- 有限集合 A 上の置換
  - A 上の全単射

例: $A=\{1, 2, 3\}$
- $f_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

- $|A|=n$ ならば, A 上の置換は $n!$ 個ある.
  - A 上の置換の個数は A 上の順列の個数に等しい.

19

恒等関数(identity function)

- 集合 A 上の恒等関数 I_A
  - 任意の $x \in A$ に対して, $I_A(x)=x$.

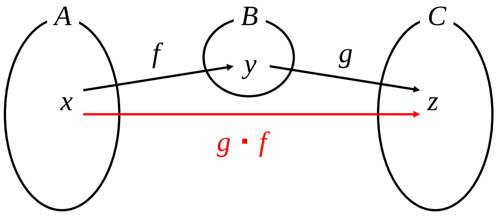
例: $A=\{1, 2, 3\}$
- $I_A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

- 有限集合 A 上の恒等関数 I_A は A 上の置換である.

20

関数の合成(composition)

- 関数 $f: A \to B$ と関数 $g: B \to C$ の合成関数 $g \cdot f: A \to C$
  - 任意の $x \in A$ に対して, $(g \cdot f)(x)=g(f(x))$



21

定理

関数 $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$ に対して,

$(h \cdot g) \cdot f = h \cdot (g \cdot f)$

(関数の合成に関する結合則)

が成り立つ.

22

定理

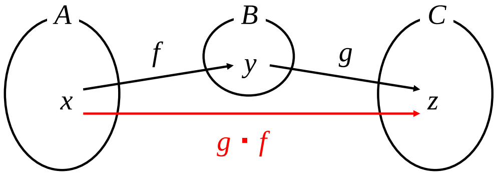
関数 $f: A \to B$, $g: B \to C$ に対して, 次の(1)～(4)が成り立つ.

(1) f, g がともに全射であるならば, $g \cdot f$ も全射である.

(2) f, g がともに単射であるならば, $g \cdot f$ も単射である.

(3) $g \cdot f$ が全射であるならば, g も全射である.

(4) $g \cdot f$ が単射であるならば, f も単射である.



23

証明

関数 $f: A \to B$, $g: B \to C$ に対して,

(1) f, g がともに全射であるならば, $g \cdot f$ も全射である.
- $g \cdot f: A \to C$
- 「任意の $z \in C$ に対して, ある $x \in A$ が存在して, $z=(g \cdot f)(x)$」を示す.

---

g は全射だから, 任意の $z \in C$ に対して, ある $y \in B$ が存在して, $g(y)=z$.
また, f は全射だから, 任意の $u \in B$ に対して, ある $x \in A$ が存在して, $f(x)=u$.
特に, $y \in B$ に対して, ある $x \in A$ が存在して, $f(x)=y$.
すなわち, 任意の $z \in C$ に対して, ある $x \in A$ が存在して,
$(g \cdot f)(x)=g(f(x))=z$ だから, $g \cdot f$ は全射である.

24

証明（続き）

関数 $f:A\to B$，$g: B\to C$ に対して，
（2） f, g がともに単射であるならば，$g\cdot f$ も単射である．

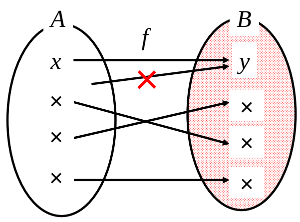
- $g\cdot f:A\to C$
- 「任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して，$(g\cdot f)(x_1)=(g\cdot f)(x_2)$ ならば $x_1=x_2$」を示す．

任意の $x_1, x_2\in A$ に対して，$(g\cdot f)(x_1)=(g\cdot f)(x_2)$とする．
このとき，$g(f(x_1))=g(f(x_2))$．
g は単射だから，$f(x_1)=f(x_2)$．
さらに，f は単射だから，$x_1=x_2$．
したがって，$g\cdot f$ は単射である．

25

定理

関数 $f:A\to B$ が全単射であるとき，かつそのときに限り，
任意の $y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が唯一存在して，
$y=f(x)$である．



26

証明

関数 $f:A\to B$ が全単射であるとき，かつそのときに限り，
任意の $y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が唯一存在して，$y=f(x)$である．

- a)「f が全単射であるならば，任意の $y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が唯一存在して，$y=f(x)$」と
- b)「任意の $y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が唯一存在して，$y=f(x)$ ならば，f は全単射である」の両方を示す．
  - a-1)「f は全単射である」を仮定して，「任意の $y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が存在して，$y=f(x)$」を示す．
  - a-2)「任意の$y\in B$に対して，$y=f(x)$となる $x\in A$は唯一である」を示す．
    - 「任意の$y\in B$に対して，$y=f(x)$となる $x\in A$は2つ存在する」を仮定して，矛盾を導く．

---

a)　f は全単射であると仮定する．
a-1) f は全射だから，任意の $y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が存在して，$y=f(x)$．

27

証明（続き）

関数 $f:A\to B$ が全単射であるとき，かつそのときに限り，
任意の $y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が唯一存在して，$y=f(x)$である．

- a)「f が全単射であるならば，任意の $y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が唯一存在して，$y=f(x)$」を示す．
  - a-2)「f は全単射である」を仮定して，「任意の$y\in B$に対して，$y=f(x)$となる $x\in A$は唯一である」を示す．
    - 「任意の$y\in B$に対して，$y=f(x)$となる $x\in A$は2つ存在する」を仮定して，矛盾を導く．

---

a)　f は全単射であると仮定する．
a-2) 任意の $y\in B$ に対して，$y=f(x_1)$かつ $y=f(x_2)$ $(x_1\neq x_2)$と仮定する．
　ところが，f は単射だから，$f(x_1)\neq f(x_2)$．
　これは，$y=f(x_1)=f(x_2)$に矛盾する．
　ゆえに，任意の$y\in B$に対して，$y=f(x)$となる $x\in A$は唯一である．

28

証明（続き2）

関数 $f:A\to B$ が全単射であるとき，かつそのときに限り，
任意の $y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が唯一存在して，$y=f(x)$である．

- b)「任意の $y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が唯一存在して，$y=f(x)$ ならば，f は全単射である」を示す．
  - b-1)「f は全射である」と
  - b-2)「f は単射である」を示す．
  - b-1)「任意の $y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が存在して，$y=f(x)$」を示す．
  - b-2)「任意の $x_1, x_2\in A$ に対して，$f(x_1)=f(x_2)$ならば $x_1=x_2$」を示す．

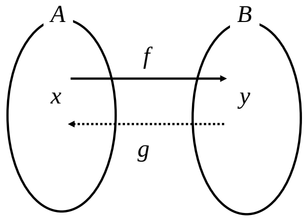
---

b)　任意の $y\in B$ に対して，ある $x\in A$ が唯一存在して，$y=f(x)$ と仮定する．
b-1) このとき，明らかに f は全射である．
b-2) 任意の $x_1, x_2\in A$ に対して，$f(x_1)=f(x_2)=y$ とする．
　　このとき，$y\in B$ に対して，$y=f(x)$ となる $x\in A$ は唯一存在するから，
　　$x_1=x_2$．ゆえに，f は単射である．
a)，b) から，f は全単射である．

29

定理

関数 $f:A\to B$ が全単射であるとき，かつそのときに限り，
$$g\cdot f = I_A \quad \text{かつ} \quad f\cdot g = I_B$$
を満たす関数 $g: B\to A$ は唯一存在する．



30

逆関数（inverse function）

- 関数 $g : B \to A$ は関数 $f : A \to B$ の逆関数である
  - $g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$
  - $f : A \to B$ の逆関数 … $f^{-1} : B \to A$
  - $x \in A, y \in B$に対して， $f^{-1}(y) = x$ iff $f(x) = y$
- 逆関数は逆関係である．
- 関数 f の逆関係 f^{-1}は，一般には関数ではない．
  - f が全単射であるとき，かつそのときに限り，逆関係 f^{-1}は f の唯一の逆関数である．

31

証明

関数 $f : A \to B$ が全単射であるとき，かつそのときに限り，
$g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$を満たす関数 $g : B \to A$は唯一存在する．

- a）「 f が全単射であるならば，$g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$ を満たす $g : B \to A$ が唯一存在する」と
- b）「 $g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$ を満たす関数 $g : B \to A$ が唯一存在するならば，f は全単射である」の両方を示す．
  - a-1)「 f は全単射である」を仮定して，「$g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$ を満たす g が存在する」を示す．
  - a-2)「$g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$ を満たす g は唯一である」を示す．

32

証明（続き）

a）「f が全単射であるならば，$g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$ を満たす g は唯一存在する」を示す．

- a-1)「 f は全単射である」を仮定して，「$g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$ を満たす g が存在する」を示す．
- a-2)「$g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$ を満たす g は唯一である」を示す．

---

a） f は全単射であると仮定する．
a-1) このとき，任意の $y \in B$ に対して，$x \in A$ が唯一存在して，$y = f(x)$．
そこで，関数 $g : B \to A$ を $g(y) = x$ と定義する．
このとき，$(f \cdot g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$ だから，$f \cdot g = I_B$.
また，任意の $x \in A$ に対して，$y = f(x)$とおくと，
$(g \cdot f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$ だから，$g \cdot f = I_A$.

33

証明（続き2）

a）「f が全単射であるならば，$g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$ を満たす g は唯一存在する」を示す．

- a-1)「 f は全単射である」を仮定して，「$g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$ を満たす g が存在する」を示す．
- a-2)「$g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$ を満たす g は唯一である」を示す．
  - 「$g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$ を満たす g は2つある」と仮定して，矛盾を導く．

---

a） f は全単射であると仮定する．
a-2) $g_1 \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g_1 = I_B$，$g_2 \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g_2 = I_B$とする．
任意の $y \in B$ に対して，
$y = I_B(y) = (f \cdot g_1)(y) = f(g_1(y))$，
$y = I_B(y) = (f \cdot g_2)(y) = f(g_2(y))$．
ゆえに，$f(g_1(y)) = f(g_2(y))$．
f は単射だから，$g_1(y) = g_2(y)$．ゆえに，$g_1 = g_2$.
すなわち，$g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$ を満たす g は唯一である．

34

証明（続き3）

b）「 $g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$を満たす関数 $g : B \to A$ が唯一存在するならば，f は全単射である」を示す．

- 「 $g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$を満たす関数 g が唯一存在する」を仮定して，「f は全単射である」を示す．
  - b-1)「任意の $y \in B$ に対して，ある $x \in A$ が存在して，$y = f(x)$」を示す．
  - b-2)「任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して，$f(x_1) = f(x_2)$ならば $x_1 = x_2$」を示す．

---

b） $g \cdot f = I_A$ かつ $f \cdot g = I_B$を満たす関数 g が唯一存在すると仮定する．
b-1)このとき，任意の $y \in B$ に対して，$f(g(y)) = (f \cdot g)(y) = I_B(y) = y$.
$g(y) = x$ とおくと，$y = f(x)$であり，$x \in A$.
ゆえに，f は全射である．
b-2) 任意の $x_1, x_2 \in A$ に対して，$f(x_1) = f(x_2)$と仮定する．
ところで， $x_1 = I_A(x_1) = (g \cdot f)(x_1) = g(f(x_1))$，
$x_2 = I_A(x_2) = (g \cdot f)(x_2) = g(f(x_2))$
$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$だから，$x_1 = x_2$.
ゆえに，f は単射である．

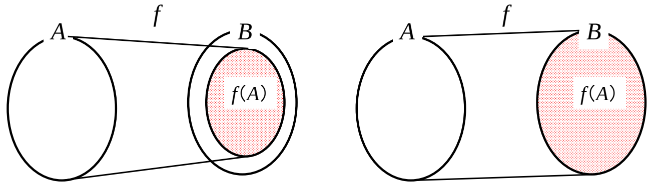
35

定理

関数 $f : A \to B$ に対して，次の（1），（2）が成り立つ．

（1） f が単射であるならば，逆関係 f^{-1}は $f(A)$から A への逆関数であり，しかも単射である．

（2） f が全単射であるならば，逆関係 f^{-1}は B から A への逆関数であり，しかも全単射である．



36

定理

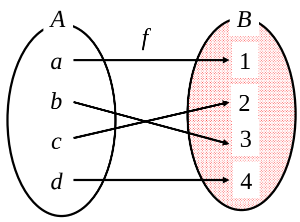
全単射 $f: A \to B$, $g: B \to C$ に対して,

$$(g \cdot f)^{-1} = f^{-1} \cdot g^{-1}$$

が成り立つ.

定理

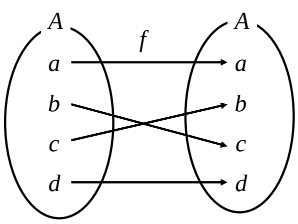
有限集合 A から有限集合 B への全単射が存在するならば, $|A| = |B|$.



定理

有限集合 A 上の関数 f について, 次の(1)～(3)は同値である.

(1)　f は全射である.
(2)　f は単射である.
(3)　f は全単射である.



関数の集合

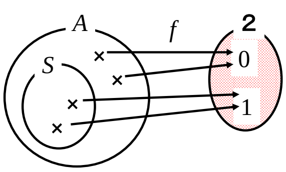
集合 A, B に対して,

- $B^A = \{ f \mid f: A \to B \}$
  - 集合 A から集合 B へのすべての関数からなる集合（集合 A から集合 B への配置集合）

- 有限集合 A, B に対して, $|B^A| = |B|^{|A|}$

特性関数（characteristic function）

$B^A = \{ f \mid f: A \to B \}$



- $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ とおくと,
  $\mathbf{2}^A = \{ f \mid f: A \to \{0, 1\} \}$
- $S = \{x \in A \mid f(x) = 1\}$ とおくと,
  $x \in S \subseteq A$　iff　$f(x) = 1$
  - f が決まれば S も決まる. 逆に, S が決まれば f も決まる.
  - f と S を同一視することができる.
- $\mathbf{2}^A = \{ S \mid S \subseteq A \}$
  $= \boldsymbol{P}(A)$

- $f: A \to \{0, 1\}$
  … 集合 S の特性関数（characteristic function）
- $f: A \to [0, 1]$
  … 集合 S の所属関数（membership function）
  - ファジー（fuzzy）集合

まとめ

- 今回の講義
  - 関数
- 今回の演習
  - 半順序

- 次回の演習（5／22　1･2限）
  - （1限）束
  - （2限）関数
  - 解答用紙は提出不要

- 中間試験（ 5／29　1限）
  - 試験範囲：　講義1～5（集合論）
  - 持込み不可
  - 教室：　演習時と同じ　，1人ずつ空けて着席すること
  - 演習問題解答例（pdf 版）
    - http://www.kl.i.is.nagoya-u.ac.jp/~toyama/lecture/risan14/

- 次回の講義（5／29　2限）
  - 約数･倍数（教科書　pp.101-106, 113-116）