第1回 金属中の自由電子

▷ はじめに

この講義の目標

(1) 固体の電子状態を実空間・波数空間の両面から理解する

(2) 電気伝導という非平衡現象を理解する

(3) 新物質と新機能を (1)(2) を基に理解する.

▷ 自由電子による金属の理解　Drude (1900)

仮定　(1) 電子は金属中で理想気体のようにふるまう

(2) 電子はある確率で散乱される.

(3) 散乱確率を $\frac{1}{\tau}$ で定義する.　τ : 散乱時間

(4) 散乱直後に電子はその場所で熱平衡に達する.

▷ 運動方程式

時刻 t で電子の運動量 $\vec{p}(t)$.

散乱がないと … $\vec{p}(t) + \underbrace{\vec{f}(t)}_{\text{外力}} dt$ に発展.

散乱<u>されない</u>確率は $1 - \frac{dt}{\tau}$

$$\vec{p}(t+dt) = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right)\left\{\vec{p}(t) + \vec{f}(t)\,dt\right\} + O(dt)^2$$

$dt \to 0$ $$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{1}{\tau}\vec{p} + \vec{f}} \qquad (*)$$

仮定(2)(3)で導入した $1/\tau$ は「速度に比例する抵抗」と等価

Ohmの法則

(*)式で $\vec{f} = e\vec{E}$ $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\tau}\vec{v} + \frac{e}{m}\vec{E}$$

定常状態で 左辺 $= 0$ $\therefore \vec{v} = \frac{e\tau}{m}\vec{E}$

電流密度は $\vec{j} = ne\vec{v}$

n: 電子密度

$$\therefore \vec{j} = ne \cdot \frac{e\tau}{m}\vec{E} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}$$

$\vec{j}$ と $\vec{E}$ は比例 $\to$ Ohmの法則

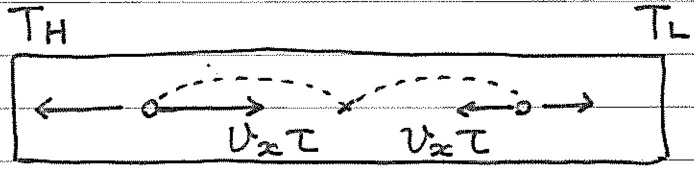
比例係数 (電気)伝導率 $\boxed{\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}}$

τをみつもってみる.

$$\begin{cases} e = 1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} & m = 9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \\ n = 2 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3} \end{cases}$$

$\to \tau \sim 10^{-14}\,\mathrm{sec}$ $10^{-14}\,\mathrm{sec}$で終端速度に達する

▷ 熱伝導 〜 Fourier の法則



ある点 x の左右 $v_x\tau$ 離れた点を考える

熱流は $j_T = \frac{1}{2} n v_x \varepsilon(T(x - v_x\tau))$ ← 左側

$- \frac{1}{2} n v_x \varepsilon(T(x + v_x\tau))$ ← 右側

いま $v_x\tau$ はとても短いキョリとして

$$j_T \fallingdotseq \frac{1}{2} n v_x \frac{d\varepsilon}{dT}\frac{dT}{dx}(-v_x\tau) - \frac{1}{2} n v_x \frac{d\varepsilon}{dT}\frac{dT}{dx}(v_x\tau)$$

$$= n v_x^2 \tau \frac{d\varepsilon}{dT} \cdot \left(-\frac{dT}{dx}\right)$$

$v_x^2 = \frac{1}{3} v^2$ とし, j_T, $\left(-\frac{dT}{dx}\right)$ を3次元にすると

$$\vec{j}_T = \frac{1}{3} n v^2 \tau \frac{d\varepsilon}{dT} \cdot (-\vec{\nabla} T)$$

$\vec{j}_T$ と $(-\vec{\nabla} T)$ が比例 → Fourier の法則

比例係数 $K = \frac{1}{3} \underbrace{n}_{} v^2 \tau \underbrace{\frac{d\varepsilon}{dT}}_{}$ 単位体積あたりの比熱

$$\boxed{K = \frac{1}{3} C_V v^2 \tau}$$ 熱伝導率

Wiedemann-Franzの法則

$$\frac{K}{\sigma T} = \frac{\frac{1}{3} C_v v^2 \tau}{\frac{n e^2 \tau}{m} \cdot T} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} m v^2 \frac{\frac{3}{2} n k_B}{n e^2 T}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} k_B T \cdot \frac{\frac{3}{2} k_B}{e^2 T} = \frac{3}{2} \left(\frac{k_B}{e}\right)^2$$

電気を通すものは熱もよく通し，$L = \frac{K}{\sigma T}$ は物質によらない

金属の誘電率

$\vec{E}$ として $\vec{E} = \vec{E_0} e^{-i\omega t}$

運動方程式 (*) は $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \vec{v} + \frac{e}{m} \vec{E_0} e^{-i\omega t}$

変位 $\vec{x}$ に直して $\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{\tau} \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{e}{m} \vec{E_0} e^{-i\omega t}$

特解 $\vec{x_0} e^{-i\omega t}$ を代入，

$$-\omega^2 \vec{x_0} = +i\omega \frac{1}{\tau} \vec{x_0} + \frac{e}{m} \vec{E_0}$$

$$\therefore \vec{x_0} = -\frac{1}{\omega(\omega + \frac{i}{\tau})} \cdot \frac{e}{m} \vec{E_0}$$

電気双極子 $e\vec{x_0} = -\frac{1}{\omega(\omega + \frac{i}{\tau})} \frac{e^2}{m} \vec{E_0}$

体積平均をとると 分極 $\vec{P}$

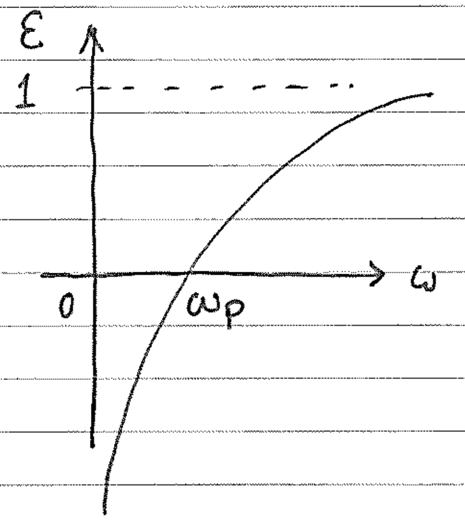
いまの場合は $\vec{P} = ne\vec{x_0}$

$$\vec{P} = -\frac{\frac{ne^2}{m}}{\omega(\omega + i/\tau)}\vec{E_0}$$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ から、

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \underbrace{\left(1 - \frac{\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}}{\omega(\omega + i/\tau)}\right)}_{\text{比誘電率}} \vec{E_0}$$

$\boxed{\dfrac{ne^2}{\varepsilon_0 m} = \omega_p^2}$ とおくと　ω_p プラズマ周波数



いま、$\omega \gg i/\tau$ を考えると

$$\boxed{\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

屈折率 n は　$n \doteqdot \sqrt{\varepsilon_r}$

反射率は　$R \doteqdot \left|\dfrac{1-n}{1+n}\right|$

$\omega < \omega_p$ で　$R \doteqdot 1$　　金属はピカピカ.

還元主義 (Reductionism) の成功例.