特発性側弯症の成因解明と臨床応用の可能性
～ 計算力学によるアプローチ ～

2013 年度 医工学連携セミナー

畔上 秀幸

名古屋大学 情報科学研究科 複雑系科学専攻

2013 年 7 月 9 日

§1 はじめに

1. 畔上研究室の研究テーマ
2. 医師らとの出会い
3. 本授業の話題

§1.1 畔上研究室の研究テーマ

境界変動型形状最適化問題とは，偏微分方程式の境界値問題が定義された $d \in \{2,3\}$ 次元の初期領域 Ω_0 に対して最適な写像 $\phi : \Omega_0 \to \mathbb{R}^d$ を求める問題をいう.

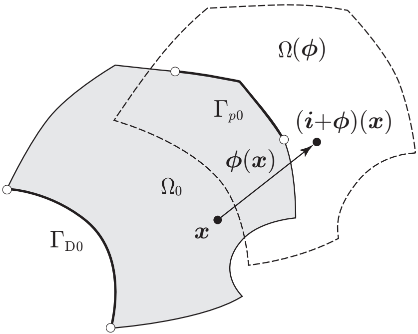


図 1： 初期領域 $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ と写像 ϕ

§1.1 畔上研究室の研究テーマ (cnt.)

密度型位相最適化問題とは，偏微分方程式の境界値問題が定義された $d \in \{2, 3\}$ 次元の固定領域 D に対して最適な密度 ϕ を求める問題をいう．ただし，$\theta : D \to \mathbb{R}$ を設計変数にして，ϕ は θ のシグモイド関数で与えられると仮定する．

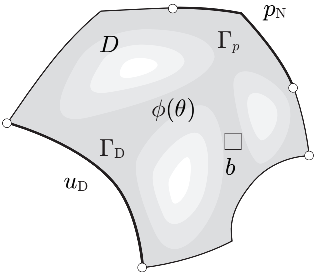


図 2： 固定領域 D と密度 $\phi(\theta)$

§1.1 畔上研究室の研究テーマ (cnt.)

境界値問題 線形弾性問題
目的関数 平均コンプライアンス
制約関数 体積
形状変動制約 左右面法線方向

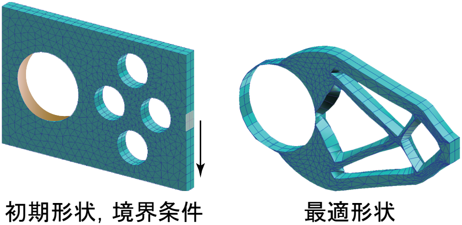
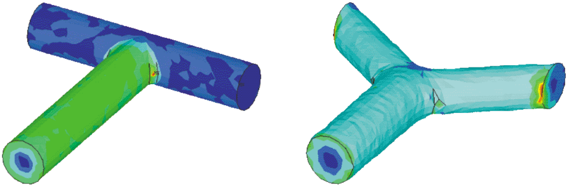


図 3： H^1 勾配法による Michell トラスの形状最適化 [1]

§1.1 畔上研究室の研究テーマ (cnt.)

境界値問題 Stokes 問題
目的関数 圧力損失エネルギー
制約関数 体積
形状変動制約 流入流出境界



初期　　最適

図 4： Stokes 問題に対する形状最適化 [2]

§1.1 畔上研究室の研究テーマ (cnt.)

境界値問題 線形弾性問題
目的関数 平均コンプライアンス
制約関数 体積

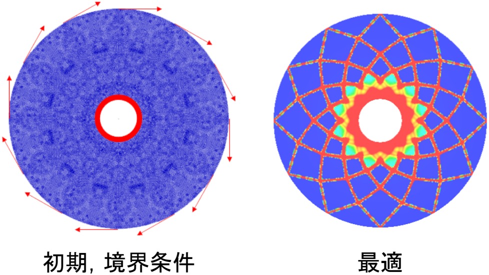


図 5： トルクを受ける円板の密度型位相最適化 [3]

§1.1 畔上研究室の研究テーマ (cnt.)

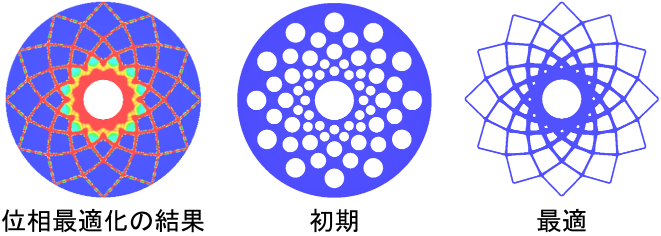
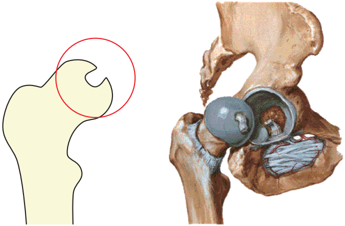


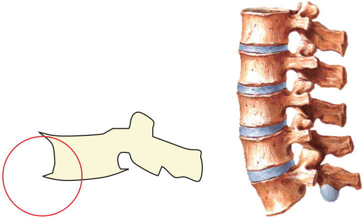
図 6： トルクを受ける円板の形状位相最適化 [3]

§1.2 医師らとの出会い

1. 医用材料懇話会 (1989): 石田義人，村地俊二（当時 愛知県身障者コロニー中央病院 ）先生と出合った.



(a) 変形股関節症の骨嚢胞



(b) 変形性腰椎症の骨棘

図 7： 骨変形による疾患[1]

[1] CD-ROM, Version 1.1 of the Interactive Atlas, copyright 1995 Ciba-Geigy Coorporation, 556 Morris, Summit, NU 07901

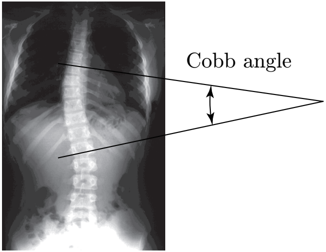
§1.3 本授業の話題

1. 特発性側弯症とはどんな疾患か？
2. どんな仮説が唱えられてきたのか？
3. 特発性側弯症の成因解明
4. 臨床支援に向けて

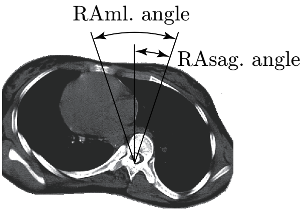
§2 特発性側弯症とはどんな疾患か？

学童期・思春期特発性側弯症の特徴

1. 女性に多い (男：女 ＝ 2 : 8 〜 1 : 9).
2. 右凸カーブに左から前方向の回旋を伴う (図 8).



(a) 右凸カーブ

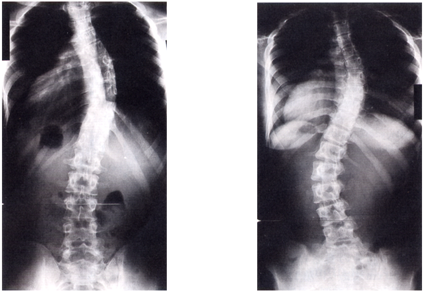


(b) 左から前方向の回旋

図 8： 特発性側弯症の脊柱変形

§2 特発性側弯症とはどんな疾患か？ (cnt.)

3. 胸椎型，胸腰椎型および腰椎型のシングルカーブとダブルカーブの症例がみられる (図 9).



(a) 胸椎型シングルカーブ (b) ダブルカーブ

図 9： 特発性側弯症の症例

§2 特発性側弯症とはどんな疾患か？ (cnt.)

4. 思春期の急成長 (growth spurt) に伴って急激に進行する (図 10).

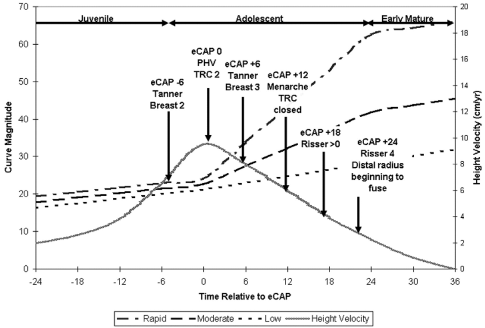


図 10： 身体成熟指標と側弯の進行 [4]

§2 特発性側弯症とはどんな疾患か？ (cnt.)

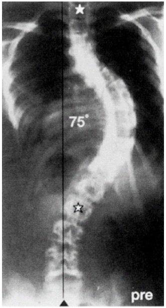
悪化に伴う障害

1. 美容上の問題：背部の肋骨隆起，ウエストラインの左右非対称
2. 疼痛：腰背部痛，肩こり
3. 心肺機能障害：肺活量の低下，慢性の心機能障害

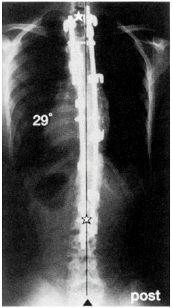
治療法

1. 経過観察
2. 装具治療
3. 手術治療

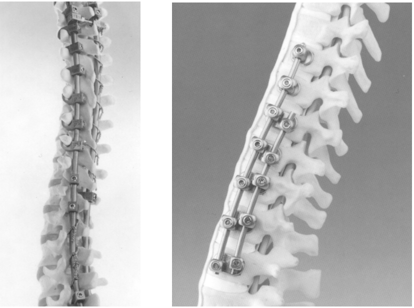
§2 特発性側弯症とはどんな疾患か？ (cnt.)



(a) 手術前



(b) 手術後



(c) Pedicle screw[2]

図 11： 特発性側弯症の手術

[2] 販売名 KANEDA-SR，株式会社ロバート・リード商会

§3 どんな仮説が唱えられてきたのか？

これまでに注目されてきた仮説 [5]

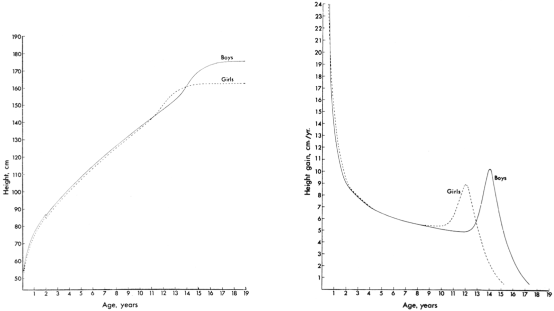
1. 骨・軟骨構造異常説 (生体力学的病因)
2. 神経系異常説
3. 傍脊柱筋異常説
4. メラトニンとカルモジュリン (生理学的病因)
5. 結合織異常説
6. 遺伝的関与

§3 どんな仮説が唱えられてきたのか？ (cnt.)

生体力学的病因に関わる仮説

1. 不均衡成長説 (座屈とみなせる現象を含む)
   - Arkin (1950)[6], Somerville (1952)[7], Roaf (1977)[8], Stokes et al. (1996)[9]
2. 座屈説 (不均衡成長に起因するものを含む)
   - Lucas et al. (1961)[10], Andriacchi et al. (1974)[11], 篠田・村地 (1976, 1977)[12, 13], Dickson et al. (1984)[14]

§3.1 成長の観察



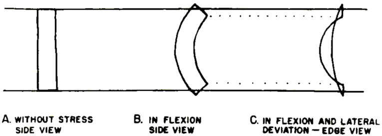
(a) 身長の経年変化 (b) 身長増加速度の経年変化

図 12： 身長の経年変化 [15]

§3.2 不均衡成長説

Arkin モデル [6]

- ゴム板を面内で曲げると弯曲する.
- 横に曲げると回旋する.



(a) 面内曲げによる弯曲

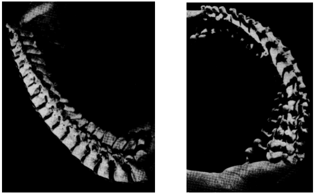
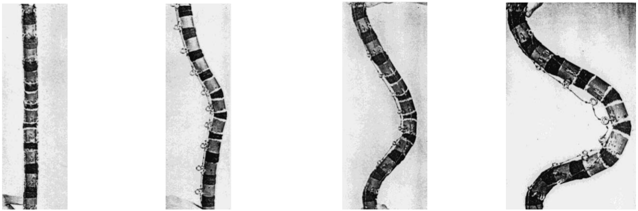

(b) 横曲げによる回旋

図 13： Arkin モデル [6]

§3.2 不均衡成長説 (cnt.)

Somerville モデル [7]

- 後方を紐で固定し前彎を作成する.
- 前に曲げると回旋が起こる.
- 上から押すと回旋が増す.



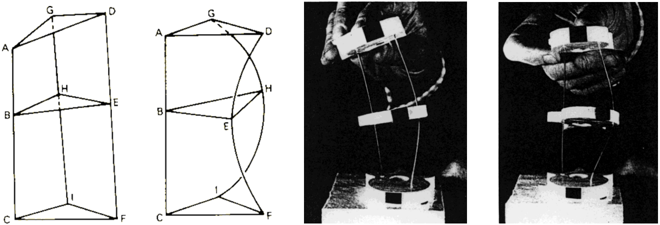
(a) 変形前　(b) 後方紐固定　(c) 上から押す　(d) さらに押す

図 14： Somerville モデル [7]

§3.2 不均衡成長説 (cnt.)

Roaf モデル [8]

- 椎体の不均衡な成長を矯正すれば回旋が起こる.



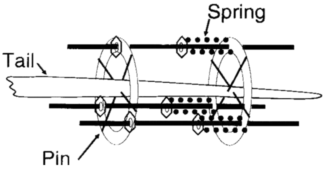
(a) 概念図 (b) 変形前 (c) 矯正後

図 15 : Roaf モデル [8]

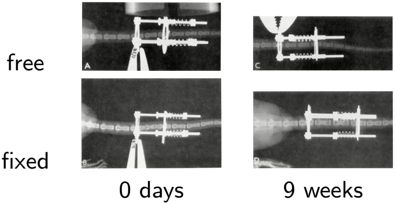
§3.2 不均衡成長説 (cnt.)

Stokes らの実験 citeStokes-1996

- ラットの尾に外力を作用させる実験を行った.
- 負荷の偏りに起因する骨の吸収現象 (Hueter-Volkmann 則) が観察された.



(a) 実験装置



(b) 実験結果の例

図 16： Stokes らの実験 [9]

§3.2 不均衡成長説 (cnt.)

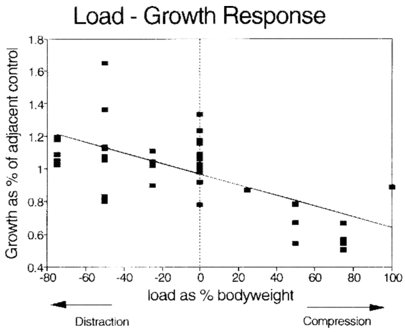


図 17： Stokes らの測定結果 [9]

§3.2 不均衡成長説 (cnt.)

Wolff 則と Hueter-Volkmann 則: Fung モデル [16] による解釈

- s を応力，m を骨の質量とおくとき，

$$\dot{m} = C\,(s-a)^{k_1}\,(s-b)^{k_2}\,(s-c)^{k_3}$$

が成り立つ (図 18)．ただし，a, b, c, k_1, k_2, k_3, C は定数であり，$(\dot{\cdot})$ は時間微分を表す．

- $s_{\mathrm{C}} = (b-a)/2$ を境界にして，$s < s_{\mathrm{C}}$ のとき Wolff 則が成り立ち，$s > s_{\mathrm{C}}$ のとき Hueter-Volkmann 則が成り立つ．

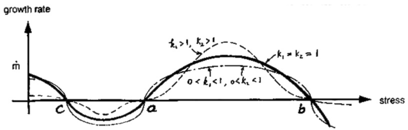
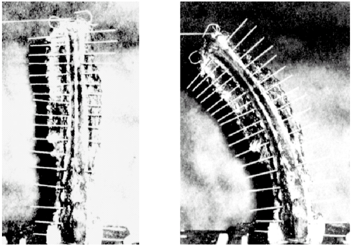


図 18： Fung の骨再構築モデル [16]

§3.3 座屈説

Lucas らの実験 [10]

- 成人男性屍体靭帯付脊柱を用いて曲げ実験を行った.
- 上半身の重量程度の力が上端にかかれば Euler 座屈が発生する.



(a) 横荷重なし　(b) 横荷重あり

図 19： Lucas らの実験 [10]

§3.3 座屈説 (cnt.)

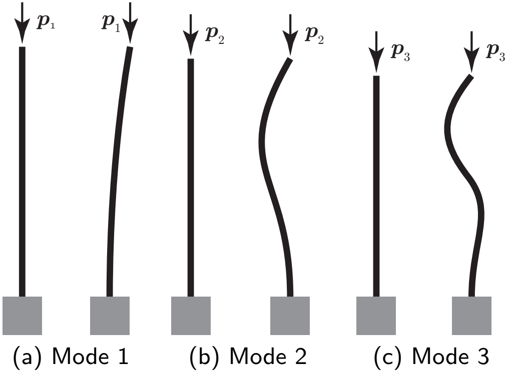


図 20： Euler 座屈

§3.3 座屈説 (cnt.)

Andriacchi の数値解析 [11]

- 椎骨を剛体要素，上端部を固定し，Lucas の結果と比較した.
- 胸郭があることにより座屈が発生しにくくなる.

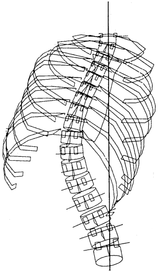
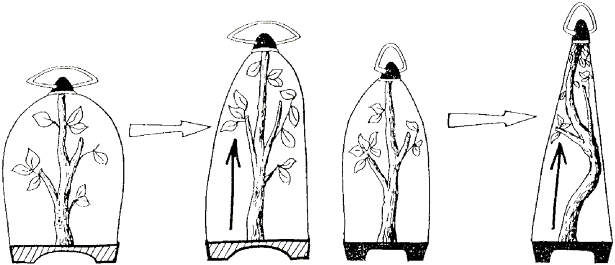


図 21： Andriacchi の数値解析 [11]

§3.3 座屈説 (cnt.)

篠田・村地の考え方 [12, 13]

- 胸郭の拘束下で脊柱が急激に成長することによる座屈現象である(鳥かご理論).



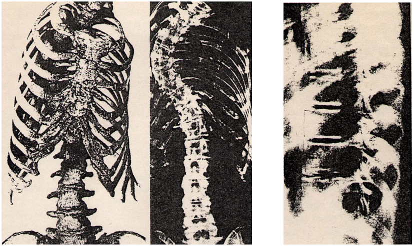
(a) 通常の成長 (b) 急激な成長

図 22： 篠田・村地の考え方 [12, 13]

§3.3 座屈説 (cnt.)

Dickson らの指摘 [14]

- 胸椎後彎の著しい減少が側弯形態への引き金となる.



(a) 特発性側弯症

(b) Scheuermann 後彎症

図 23： Dickson らの指摘 [14]

§3.3 座屈説 (cnt.)

座屈説に関する疑問

1. Lucas らの実験，Andriacchi の数値解析 ⇒ 上端の荷重あるいは拘束の実体は何か？
2. 篠田・村地の考え方 ⇒ 胸郭は成長を拘束するのか？
3. Dickson らの指摘 ⇒ 胸椎後彎の減少による座屈は存在するのか？
4. 非対称成長説 ⇒ 座屈説との関連はあるのか？

§4 特発性側弯症の成因解明

仙椎を固定して上端を自由にして，椎体の成長 (Dickson らの指摘) による変形とそれに基づく座屈解析を通して，座屈説の検証を行った．

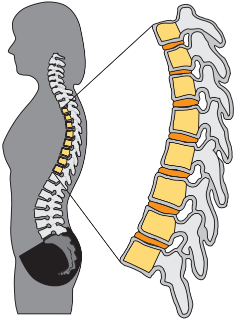
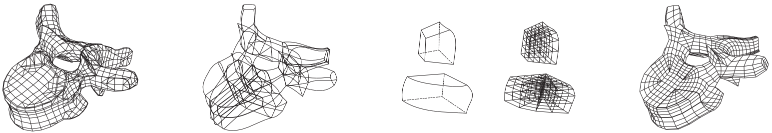


図 24： 椎体の成長

§4.1 有限要素モデルの構築

椎間板と後部靭帯の剛性を考慮した簡単な脊柱モデル [17]，胸郭付脊柱モデル [18, 19] を用いた成長と境界条件を変化させた試行錯誤の座屈解析を経て，精密モデルの構築に着手した．

市販の人体骨格の表面データ (Viewpoint Premier, catalog numbers of VP2886 and VP3611, Viewpoint Corporation, USA) を使用して，商用有限要素分割プログラム (I-DEAS Master series version 2.1, SDRC, USA) により有限要素モデルを作成した [20].



(a) 表面データ (b) 領域分割 (c) メッシュ分割 (d) 有限要素

図 25： 有限要素モデルの構築

§4.1 有限要素モデルの構築 (cnt.)

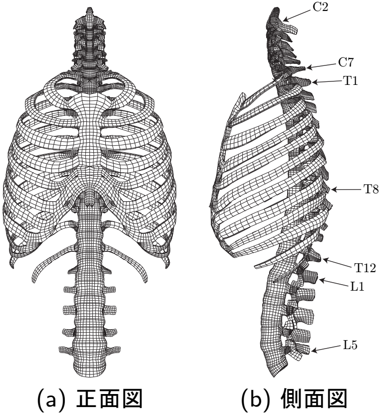
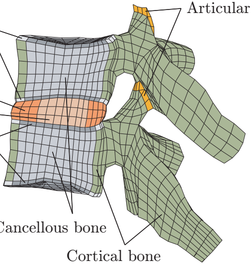
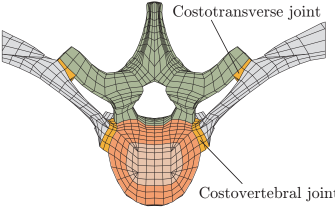


図 26： 胸郭付脊柱有限要素モデル

§4.1 有限要素モデルの構築 (cnt.)



(a) 矢状面

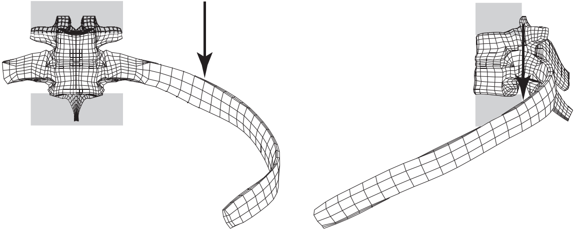


(b) 横断面

図 27： T9-T10 の有限要素モデル

§4.1 有限要素モデルの構築 (cnt.)

Markolf の実験 [21] (後方組織を切除した椎体の振り・圧縮実験), Lucas らの実験 [10]，Schultz らの実験 [22] (椎骨固定，肋骨下向き荷重) による計測結果に適合するように材料定数を決定した.



(a) 正面図 (b) 側面図

図 28： Schultz らの実験 [22]

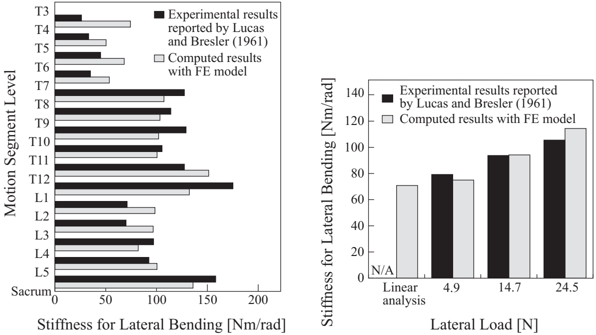
§4.1 有限要素モデルの構築 (cnt.)

表 1： 材料定数

Elements (histology)	Young's modulus [MPa]	Poisson's ratio [-]
Cortical bone	17000	0.3
Cancellous bone	200	0.3
Costal cartilage	500	0.3
Nucleus pulposus	0.1	0.3
Anulus fibrosus	2.5*	0.3
Articular capsule for C2-T12	7.5	0.3
Articular capsule for L1-L5	0.6	0.3
Head of rib joint	1.1	0.3
Costotransverse joint	1.1	0.3

*Shearing modulus is 5[MPa]

§4.1 有限要素モデルの構築 (cnt.)



(a) 椎体間曲げ剛性　(b) 荷重別曲げ剛性

図 29： Lucas らの実験 [10] との比較

§4.2 線形座屈解析

成長軟骨板 (骨端輪と硝子軟骨板) が成長すると仮定する [20].

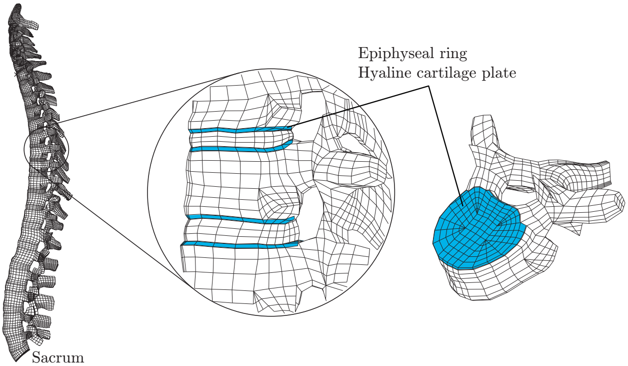
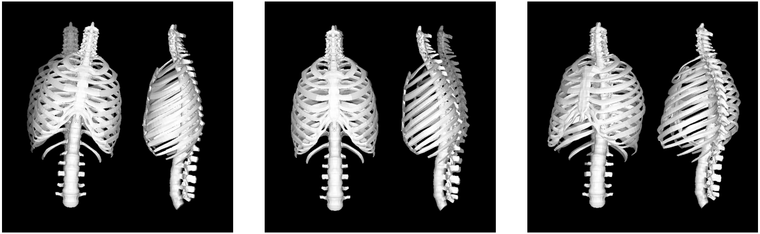


図 30： 骨端輪と硝子軟骨板の成長

§4.2 線形座屈解析 (cnt.)

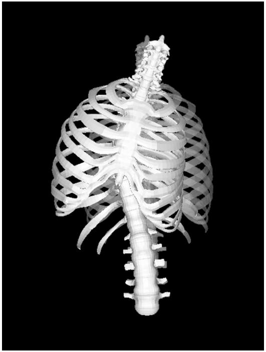
初期応力解析および線形座屈固有値解析には MSC.Nastran Version 70.7.3 (MSC. Software Corporation, USA) を使用し，固有値抽出法には，Lanczos 法を選択した [23].



(a) Mode 1　(b) Mode 2　(c) Mode 3

図 31： 1 次モードから 3 次モードまで

§4.2 線形座屈解析 (cnt.)



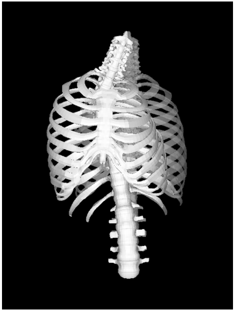
(a) Mode 4

(b) 臨床例

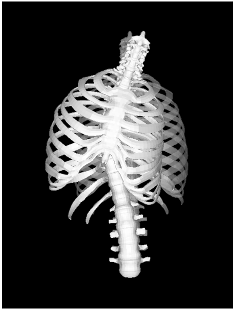
図 32 : 4 次モードと臨床例

§4.2 線形座屈解析 (cnt.)

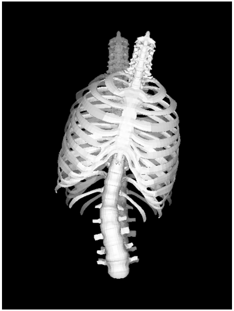
多様なモードの成因 [24]



(a) T1–T7 成長
胸椎型



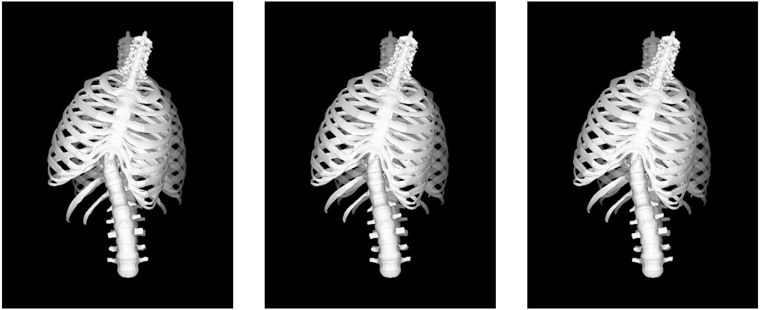
(b) T4–T10 成長
腰胸椎型



(c) T11–L5 成長
腰椎型

図 33： 4 次モードの成長部位による違い

§4.2 線形座屈解析 (cnt.)



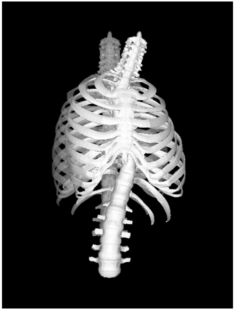
(a) T7–T11 成長
5 椎体

(b) T4–L2 成長
11 椎体

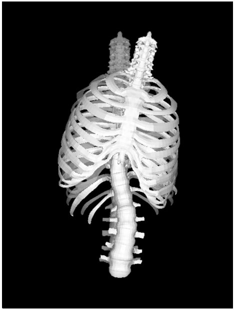
(c) T1–L5 成長
17 椎体

図 34： 4 次モードの成長範囲による違い

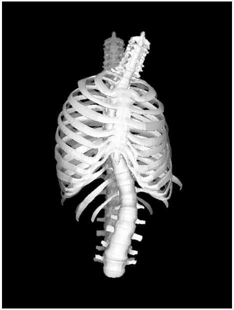
§4.2 線形座屈解析 (cnt.)



(a) T1–T11 成長



(b) T7–L5 成長



(c) T1–L5 成長

図 35： 6 次モード

§4.2 線形座屈解析 (cnt.)

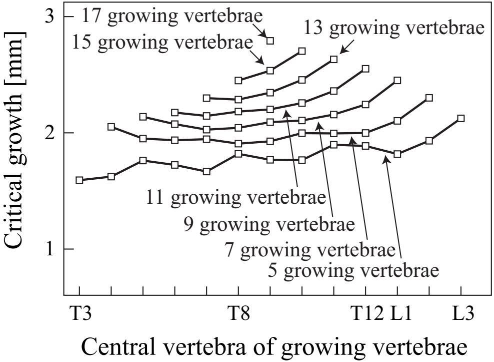


図 36： 成長範囲の違いと座屈までの成長量 (4 次モード)

§4.2 線形座屈解析 (cnt.)

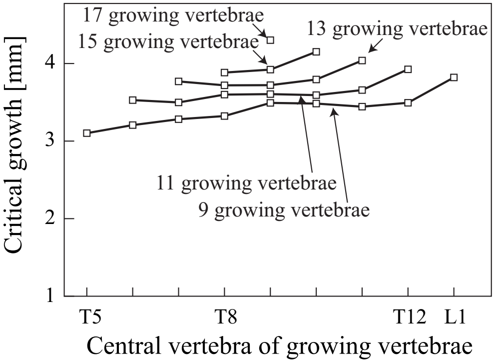


図 37： 成長範囲の違いと座屈までの成長量 (6 次モード)

§4.2 線形座屈解析 (cnt.)

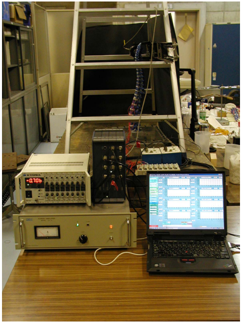
表 2 と比較すると 8 歳から 9 歳の場合で約 2.6 カ月分の過成長量があれば側弯が発生することになる.

表 2： 正常女子の年間成長量 (Nehme ら [25] の文献から算出)

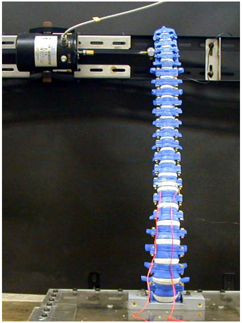
期間	7 歳 − 8 歳	8 歳 − 9 歳	9 歳 − 10 歳
胸椎	5.3%	7.0%	4.5%
胸椎椎間板	3.8%	0.8%	−5.1%
腰椎	3.9%	4.4%	2.6%
腰椎椎間板	9.8%	7.9%	6.8%

§4.3　力学模型実験

数値解析で得られた座屈モードの存在を模型を使って検証した [26, 27].



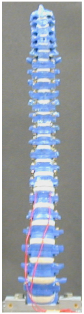
(a) 概観

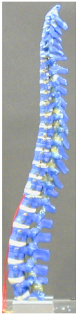


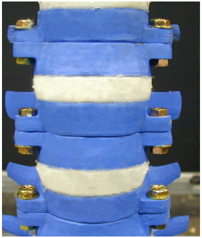
(b) 加振実験の様子

図 38： 実験装置

§4.3 力学模型実験 (cnt.)


(a) 正面


(b) 側面


(c) 椎体正面

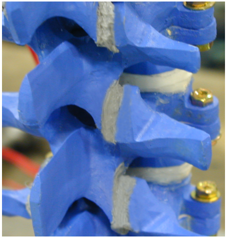

(d) 椎体側面

図 39： 脊柱模型

§4.3 力学模型実験 (cnt.)

椎体に薄板を挿入してネジ締結することで成長を実現した.

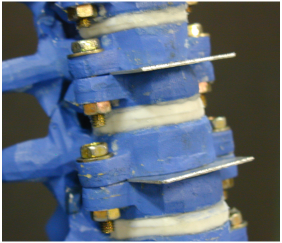


図 40： 椎体の成長

§4.3 力学模型実験 (cnt.)

椎間板の材質を違えた模型をモデル A, B, C とした.

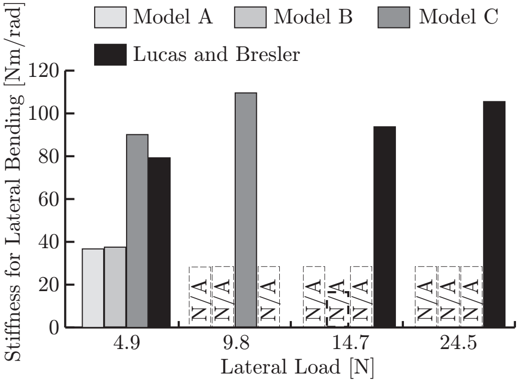
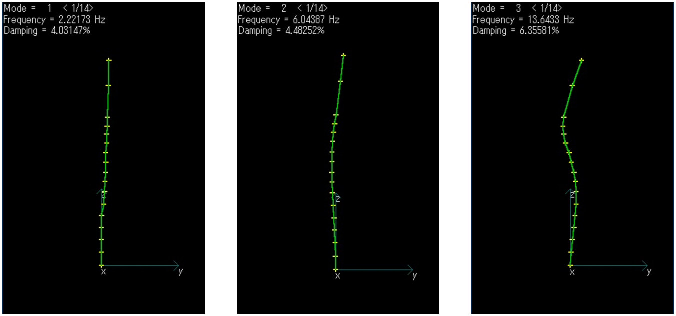


図 41： 脊柱模型の剛性 (Lucas ら [10] の結果との比較)

§4.3 力学模型実験 (cnt.)

上端部を横方向に加振したときの固有振動モードを計測した.



(a) 1 次モード (b) 2 次モード (c) 3 次モード

図 42： 実験モード解析の結果

§4.3 力学模型実験 (cnt.)

上端部に負荷を与えた.

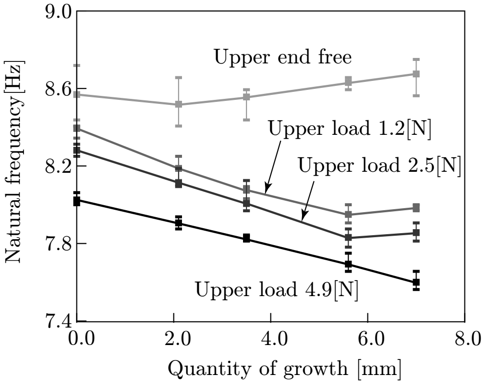


図 43： 成長量に対する 2 次固有振動数 [26]

§4.3 力学模型実験 (cnt.)

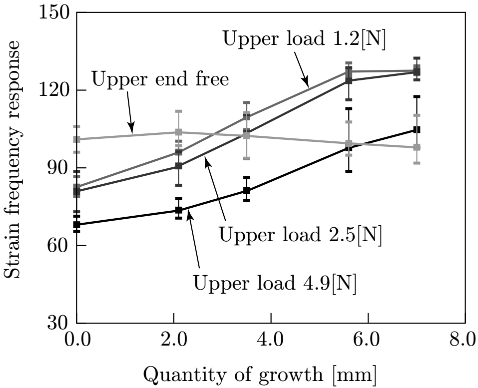
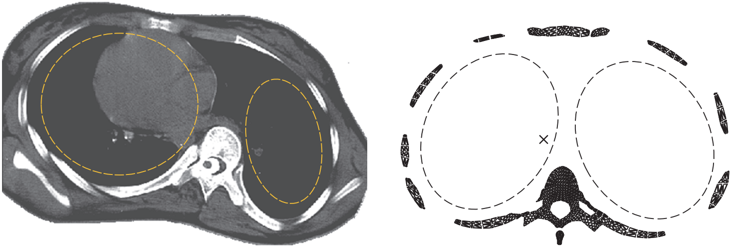


図 44： 成長量に対する 2 次固有振動数時のひずみ振幅 [26]

§4.4 胸郭変形のなぞ

臨床例と 4 次モードの胸廓変形を比較したとき左右の空間の大きさが逆転していた．その要因を探った [28].

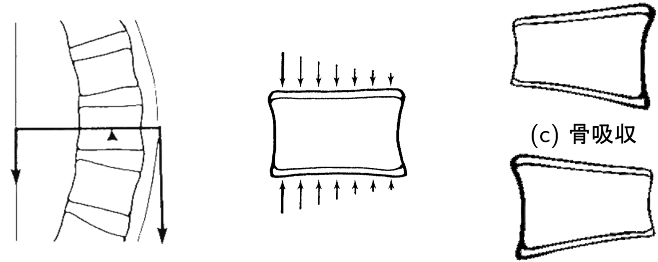


(a) 臨床例　　(b) 4 次モード

図 45：胸廓変形の比較

§4.4 胸郭変形のなぞ (cnt.)

座屈後の応力に対して骨吸収 (Hueter-Volkmann 則) と骨形成 (Wolff 則) の変形解析を行った.

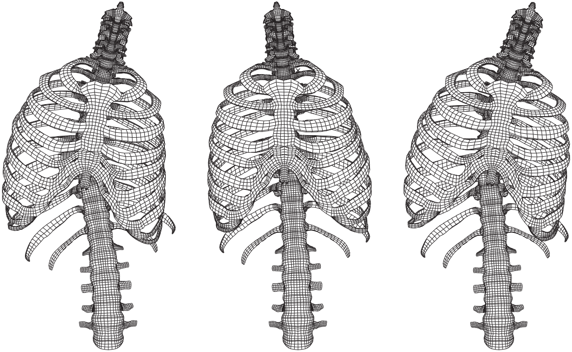


(a) 座屈後の変形　(b) 椎体に作用する外力　(c) 骨吸収　(d) 骨形成

図 46： 座屈後の応力に対する骨吸収と骨形成 [26]

§4.4 胸郭変形のなぞ (cnt.)

骨形成では回復して，骨吸収では悪化する．

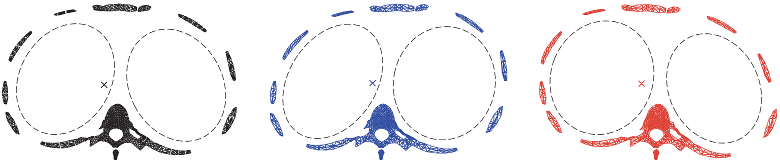


(a) 座屈後　(b) 骨形成　(c) 骨吸収

図 47： 座屈後の応力に対する骨吸収と骨形成による変形

§4.4 胸郭変形のなぞ (cnt.)

骨吸収のときに臨床でみられる胸郭変形に近づく.



(a) 座屈後 (b) 骨形成 (c) 骨吸収

図 48： 座屈後の応力に対する骨吸収と骨形成による胸廓の変形

§4.4 胸郭変形のなぞ (cnt.)

座屈後の骨再構築による結果から，次のことが考えられる．

1. 椎体の急激な成長により座屈現象が発生したとしても，正常に骨形成 (Wolff 則) が行われていれば，特発性側弯症に至ることはない．
2. しかし，次の場合には特発性側弯症に陥る可能性がある．
    - 椎体の成長速度が速い (骨形成が追い付かず，骨吸収 (Hueter-Volkmann 則) に陥る)．
    - 脊柱が細い (座屈が発生しやすい)．
    - 骨形成の機能が不足している．

§4.4 胸郭変形のなぞ (cnt.)

他の成因との関係について，次のことが考えられる．

1. 生理学的成因との関連
   - メラトニン欠乏説では，成長を抑制する機能が低下することが考えられる． Melatonin deficiency hypothesis$\Rightarrow$ 椎体の成長速度が速くなる．
2. 遺伝的成因との関連
   - 複数の遺伝子が関与していると考えられている． $\Rightarrow$ 脊柱が細い，成長期が早いなどの特徴を通して間接的に遺伝子が関与している可能性がある．

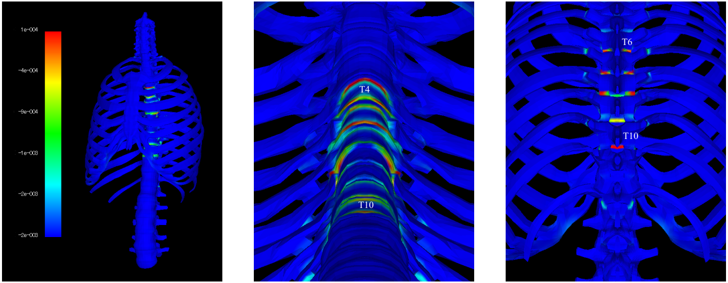
§5 臨床支援に向けて

1. 最適固定部位の特定
2. 患者別脊柱有限要素モデルの構築

§5.1 最適固定部位の特定

座屈説を仮定すれば，最適化理論に基づく数値解析により，座屈現象の発生を遅らせるような最適な補強方法を求めることができる [29].

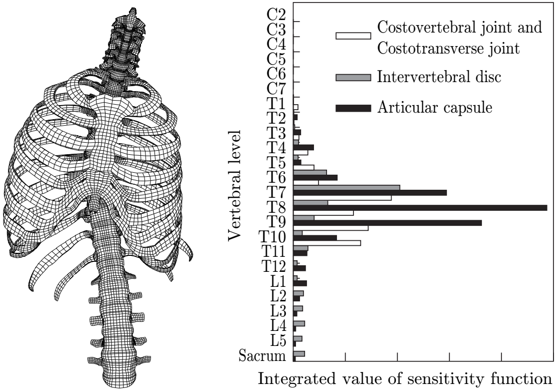
境界値問題 線形弾性体の座屈問題
境界条件 下端固定，椎体成長
目的関数 座屈係数



(a) 全体図　(b) 前方拡大　(c) 後方拡大

図 49： 4 次モードに対する形状微分の分布 (T4–T10 成長)

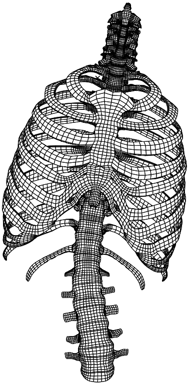
§5.1 最適固定部位の特定 (cnt.)



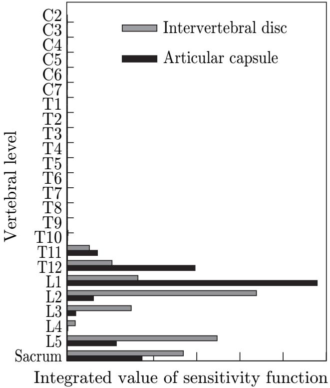
(a) 4 次モード (b) 形状微分の積分値

図 50： 脊柱の要素における形状微分の積分値 (T4–T10 成長)

§5.1 最適固定部位の特定 (cnt.)



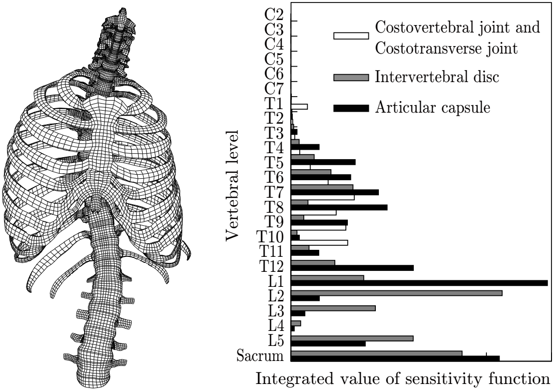
(a) 4 次モード



(b) 形状微分の積分値

図 51： 脊柱の要素における形状微分の積分値 (T10–L4 成長)

§5.1 最適固定部位の特定 (cnt.)



(a) 6 次モード (b) 形状微分の積分値

図 52： 脊柱の要素における形状微分の積分値 (T1–L5 成長)

§5.2 患者別脊柱有限要素モデルの構築

境界値問題 弾性問題

境界条件 医用画像の参照点に向かう境界力

目的関数 変位誤差積分

設計変数 領域変動

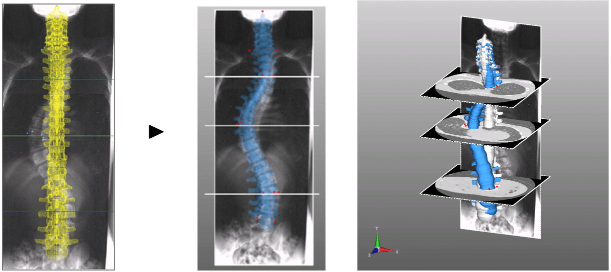
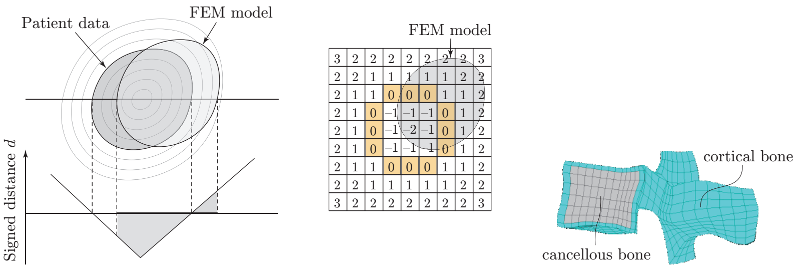


図 53： モーフィングによる患者有限要素モデルの作成 [30]

§5.2 患者別脊柱有限要素モデルの構築 (cnt.)

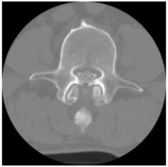
境界値問題 弾性問題
目的関数 符号付距離関数の積分
設計変数 領域写像



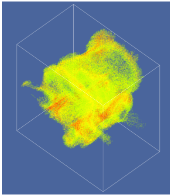
(a) 符号付き距離関数 d　(b) ボクセル上の d　(c) 椎体の構造

図 54： 符号付距離関数

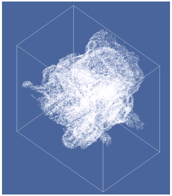
§5.2 患者別脊柱有限要素モデルの構築 (cnt.)



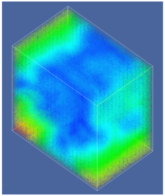
(a) CT 画像



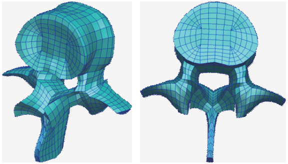
(b) ボクセルデータ



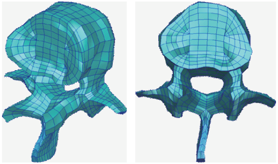
(c) 表面抽出



(d) 符号付距離



(e) 初期モデル



(f) 適合モデル

図 55： CT データに基く L3 のフィッティング [30]

§6 まとめ

1. 特発性側弯症とはどんな疾患か？
   - 特に異常がなく思春期の急成長期に発症し，急激に進行する疾患である．
2. どんな仮説が唱えられてきたのか？
   - 生体力学的病因に関わる仮説として，不均衡成長説と座屈説について紹介した．
3. 特発性側弯症の成因解明
   - Dickson ら [14] が指摘した椎体成長による座屈現象は存在する．
   - Stokes らが指摘した Hueter-Volkmann 則の吸収現象が座屈後の非対称な応力状態において発生すると考えれば側弯悪化が説明できる．
4. 臨床支援に向けて
   - 成因が座屈現象であるならば，最適化理論により，座屈の発生を遅らせるような最適な補強方法を求めることができる．
   - 医用データから患者モデルを作成できれば，固有の成因と治療法に関するデータを医師に提供できる可能性がある．

共同研究者

1. 畔上研究室
   - 安保浩孝 (1990), 鈴木隆之 (1993), 林英和 (1994), 前久保義明 (1995), 上田高行 (1996), 竹内謙善 (1997-2000), 笹岡竜 (1998-2005), 面高俊樹 (2005), 青山大樹 (2004-), 柴田俊輔 (2011), 佐藤由実 (2012-), 孫涵 (2012-)
2. 医師
   - 村地俊二 (旧 日本赤十字豊田看護大学)
   - 石田義人 (石田整形外科)
   - 川上紀明 (名城病院整形外科)
   - 牧野光倫 (トヨタ記念病院)
   - 後藤学 (後藤病院)
   - 松山幸弘 (浜松医科大学)
3. 解剖学者
   - 鬼頭純三 (名古屋大学名誉教授)

§7 レポート課題

医学あるいは医療の問題を解決する方法としての数値解析の可能性について A4 1 枚程度に記述せよ.

提出方法：NUCT を用いてオンラインでレポートを提出せよ.
提出期限：2013 年 7 月 23 日（火）

§8　付録：線形座屈解析の理論

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を $d \in \{2,3\}$ 次元の骨領域とする．$\Gamma_{\mathrm{D}} \subset \partial\Omega$ を仙骨との境界とする．

骨が成長する時間を $(0, t_{\mathrm{T}}) \subset \mathbb{R}$ とする．$p : \Omega \to \mathbb{R}$ を成長のパターンあるいは成長する部位を特定するための時間に依存しない関数とする．$\lambda : (0, t_{\mathrm{T}}) \to \mathbb{R}$ を成長の大きさを表すパラメータとする．このとき，骨の成長による変形と応力は非弾性ひずみ

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}(t, \boldsymbol{x}) = \lambda(t)\, p(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{I}$$

の発生による弾性問題の解で与えられると仮定する．ただし，$\boldsymbol{I}$ を d 次の単位行列である．$\lambda(t)$ は t の単調増加関数と仮定し，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}(t, \boldsymbol{x})$ を単に $\boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}(\lambda)$ とかくことにする．

§8 付録：線形座屈解析の理論 (cnt.)

$\boldsymbol{x} = (\partial x_j)_j \in \Omega$ の変形を写像 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{u} : (0, t_{\mathrm{T}}) \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ とおく．ただし，$\boldsymbol{i}$ は恒等写像を表す．また，Γ_{D} 上で $\boldsymbol{u} = 0$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)_{ij} = \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$$

を変形勾配いう．ただし，また，

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) = (e_{ij}(\boldsymbol{u}))_{ij} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{I}\right) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{u}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})$$

を Green-Lagrange ひずみという．ここで，

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} + \left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right),$$

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\right),$$

を線形ひずみおよび双線形項とよぶ．

§8 付録：線形座屈解析の理論 (cnt.)

一方，$\boldsymbol{C}:\Omega \to \mathbb{R}^{d\times d\times d\times d}$ を剛性として，

$$\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u},\lambda\right)=\boldsymbol{C}:\left(\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{u}\right)-\boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}\left(\lambda\right)\right)=\left(\sum_{(k,l)\in\{1,\cdots,d\}^2} c_{ijkl}e_{kl}\left(\boldsymbol{u}\right)\right)_{ij},$$

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{u},\lambda\right)=\boldsymbol{C}:\left(\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{u}\right)-\boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}\left(\lambda\right)\right)$$

を $\boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}\left(\lambda\right)$ が発生したときの第 2 Piola-Kirchhoff 応力と線形応力とする．

$$a\left(\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u},\lambda\right),\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{v}\right)\right)=\int_{\Omega}\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u},\lambda\right)\cdot\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{v}\right)\ \mathrm{d}x$$

とおく．ただし，

§8 付録：線形座屈解析の理論 (cnt.)

ある $\lambda = \lambda(t)$ が与えられたときの変位を $\boldsymbol{u}$ とおく．このとき，ポテンシャルエネルギーは

$$\pi(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} a\left(\boldsymbol{C} : (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}(\lambda)), \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}(\lambda)\right) \tag{8.1}$$

となる．そこで，$\boldsymbol{u}$ の変分を $\boldsymbol{v}$ とおけば，$\boldsymbol{u}$ は

$$\pi'(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}] = a\left(\boldsymbol{C} : (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}(\lambda)), \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}]\right) = 0 \tag{8.2}$$

を満たす．ただし，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}] &= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}}, \\
\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}] &= \frac{1}{2}\left\{(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}])^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}))^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}]\right\} \\
&= \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

である．そこで，大変形を許容した成長変位 $\boldsymbol{u}$ を求める問題は，(8.2) より次のようになる．

§8 付録：線形座屈解析の理論 (cnt.)

問題 8.1 (成長変位 (大変形を許容した弾性問題))

ある λ が与えられたとき，Γ_{D} 上で $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ となる任意の $\boldsymbol{v}:\Omega\to\mathbb{R}^d$ に対して

$$a\left(\boldsymbol{C}:\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{u}\right),\boldsymbol{E}'\left(\boldsymbol{u}\right)\left[\boldsymbol{v}\right]\right)=a\left(\boldsymbol{C}:\boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}\left(\lambda\right),\boldsymbol{E}'\left(\boldsymbol{u}\right)\left[\boldsymbol{v}\right]\right)$$

を満たす Γ_{D} 上で $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ となる $\boldsymbol{u}:\Omega\to\mathbb{R}^d$ を求めよ．

§8 付録：線形座屈解析の理論 (cnt.)

$\boldsymbol{u}$ が十分小さければ，次のようにかくことができる.

問題 8.2 (成長変位 (線形弾性問題))

ある λ が与えられたとき，Γ_{D} 上で $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ となる任意の $\boldsymbol{v} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ に対して

$$a\left(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{u}\right), \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{v}\right)\right) = a\left(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{E}_{\mathrm{G}}\left(\lambda\right), \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{v}\right)\right)$$

を満たす Γ_{D} 上で $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ となる $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ を求めよ.

§8 付録：線形座屈解析の理論 (cnt.)

さらに，$\pi'(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}] = 0$ が満たされた $\boldsymbol{u}$ における $\pi(\boldsymbol{u})$ の第 2 変分は

$$\begin{aligned}\pi''(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] &= a\left(\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{u}, \lambda)[\boldsymbol{v}_2], \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}_1]\right) \\ &\quad + a\left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}, \lambda), \boldsymbol{E}''(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\right) \qquad (8.3)\end{aligned}$$

となる．ただし，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は Γ_{D} 上で $\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ となる任意の関数である．
ここで，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}'(\boldsymbol{u}, \lambda)[\boldsymbol{v}_2] &= \boldsymbol{C} : \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}_2], \\ \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}_1] &= \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{v}_1) + \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}), \\ \boldsymbol{E}''(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] &= \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\end{aligned}$$

である．そこで，(8.3) は

$$\begin{aligned}\pi''(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] &= a\left(\boldsymbol{C} : \left(\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{v}_2) + \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u})\right), \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{v}_1) + \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1)\right) \\ &\quad + a\left(\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}, \lambda), \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\right) \qquad (8.4)\end{aligned}$$

となる．

§8 付録：線形座屈解析の理論 (cnt.)

座屈は，$\pi'(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}]=0$ が満たされた問題 8.1 の解 $\boldsymbol{u}$ において，$\pi''(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]=0$ のときの不安定現象として定義される．(8.4) において，$\boldsymbol{v}_2$ を座屈モードという．$\boldsymbol{v}_2$ の大きさは不定となる．

このような $\boldsymbol{v}_2$ を求める問題は，λ を大きくしていったときの問題 8.1 の解 $\boldsymbol{u}$ を見つけながら，$\pi''(\boldsymbol{u})[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]=0$ の条件が成り立つときの λ とそのときの座屈モード $\boldsymbol{v}_2$ を求める問題となる．

その問題は次のようにかくことができる．ある $\lambda_0=\lambda(t_0)$ を固定して，そのときの問題 8.1 の解を $\boldsymbol{u}_0$ とする．座屈が発生するときの λ を求める問題は $\lambda=\zeta\lambda_0$ を満たす $\zeta\in\mathbb{R}$ をみつける問題となる．このとき，$\boldsymbol{u}=\zeta\boldsymbol{u}_0$ となる．そこで，座屈問題は次のように定義される．ただし，$\boldsymbol{v}_2$ を $\boldsymbol{\theta}$ とかき，$\boldsymbol{v}_1$ を $\boldsymbol{\vartheta}$ とかくことにする．

§8 付録：線形座屈解析の理論 (cnt.)

問題 8.3 (非線形座屈)

ある λ_0 に対する問題 8.1 の解 $\boldsymbol{u}_0$ が与えられたとき，Γ_{D} 上で $\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ となる任意の $\boldsymbol{\vartheta} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ に対して

$$
\begin{aligned}
& a\left(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{\theta}\right), \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{\vartheta}\right)\right) \\
&\quad = -\zeta\Big(a\left(\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}_0, \lambda_0\right), \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}\left(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta}\right)\right) + a\left(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{\theta}\right), \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}\left(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\vartheta}\right)\right) \\
&\qquad + a\left(\boldsymbol{C} : \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}\left(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{u}_0\right), \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{\vartheta}\right)\right)\Big)
\end{aligned} \tag{8.5}
$$

を満たす Γ_{D} 上で $\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ となる $\zeta \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{\theta} : \Omega \to \mathbb{R}^d$ を求めよ．

§8 付録：線形座屈解析の理論 (cnt.)

問題 8.3 において，次の点に留意する必要がある．(8.5) において，

$$a\left(\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u},\lambda\right),\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\vartheta}\right)\right)=\zeta a\left(\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{u}_{0},\lambda_{0}\right),\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}\left(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\vartheta}\right)\right) \tag{8.6}$$

を仮定した．この関係は $\zeta=1$ のときに成り立つ．そこで，λ_0 は $\zeta=1$ で (8.5) が成り立つようにとる必要がある．その意味で，問題 8.3 は非線形固有値問題となる．

また，座屈モード $\boldsymbol{\theta}$ の大きさは不定である．一意に決定するためには，$\boldsymbol{\theta}$ の大きさをきめる条件を追加する必要がある．

§8 付録：線形座屈解析の理論 (cnt.)

(8.5) の右辺の $\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta})$ 以外の $\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}$ を省略すれば，次の線形座屈問題が得られる．

問題 8.4 (線形座屈)

ある λ_0 に対する問題 8.1 の解 $\boldsymbol{u}_0$ が与えられたとき，Γ_{D} 上で $\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ となる任意の $\boldsymbol{\vartheta}: \Omega \to \mathbb{R}^d$ に対して

$$a\left(\boldsymbol{C}:\boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{\vartheta})\right) = -\zeta a\left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{u}_0, \lambda_0), \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta})\right)$$

を満たす Γ_{D} 上で $\boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^d}$ となる $\zeta \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{\theta}: \Omega \to \mathbb{R}^d$ を求めよ．

問題 8.4 においては

$$a\left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{u}, \lambda), \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta})\right) = \zeta a\left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{L}}(\boldsymbol{u}_0, \lambda_0), \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\vartheta})\right) \tag{8.7}$$

が成り立つ．そこで，λ_0 は任意にとることができる．

§8 付録：線形座屈解析の理論 (cnt.)

問題 8.4 に対して，$(\cdot)_h$ を付けた記号を有限要素近似とする．$\boldsymbol{u}$ の近似関数を

$$\boldsymbol{u}_{0h}(\bar{\boldsymbol{u}}) = \sum_{j \in \mathcal{N}_{\mathrm{D}}} \begin{pmatrix} \bar{u}_{0j1}\phi_j \\ \vdots \\ \bar{u}_{0jd}\phi_j \end{pmatrix} + \sum_{j \in \mathcal{N}_{\mathrm{N}}} \begin{pmatrix} \bar{u}_{0j1}\phi_j \\ \vdots \\ \bar{u}_{0jd}\phi_j \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{u}}_{0\mathrm{D}} \\ \bar{\boldsymbol{u}}_{0\mathrm{N}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{D}} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \bar{\boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{\phi} \tag{8.8}$$

とおく．ただし，$\mathcal{N}$ を節点番号全体の集合，$\mathcal{N}_{\mathrm{D}} \subset \mathcal{N}$ を $\Gamma_{\mathrm{D}h}$ 上の節点番号の集合，$\mathcal{N}_{\mathrm{N}} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_{\mathrm{D}}$ とかく．$\mathcal{N}$ は $\mathcal{N}_{\mathrm{D}}$ が最初にくるように並び替えられているとする．$\bar{\boldsymbol{u}}_{0\mathrm{D}}$ と $\bar{\boldsymbol{u}}_{0\mathrm{N}}$ はそれぞれ $d\,|\mathcal{N}_{\mathrm{D}}|$ 次と $d\,|\mathcal{N}_{\mathrm{N}}|$ 次の節点値ベクトルである．$\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{D}}$ と $\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{D}}$ はそれぞれ $\bar{\boldsymbol{u}}_{0\mathrm{D}}$ と $\bar{\boldsymbol{u}}_{0\mathrm{N}}$ に対する基底関数を並べたベクトルである．同様に，$\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{\vartheta}$ の近似関数を

$$\boldsymbol{\theta}_h(\bar{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{D}} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{D}} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \bar{\boldsymbol{\theta}} \cdot \boldsymbol{\phi} \tag{8.9}$$

§8 付録：線形座屈解析の理論 (cnt.)

$$\boldsymbol{\vartheta}_h\left(\bar{\boldsymbol{\vartheta}}\right) = \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\vartheta}}_{\mathrm{D}} \\ \bar{\boldsymbol{\vartheta}}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{D}} \\ \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = \bar{\boldsymbol{\vartheta}} \cdot \boldsymbol{\phi} \tag{8.10}$$

とおく．このとき，

$$a\left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{\theta}_h\right), \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{\vartheta}_h\right)\right) = \bar{\boldsymbol{\vartheta}} \cdot \bar{\boldsymbol{K}}\bar{\boldsymbol{\theta}}$$
$$a\left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{u}_{0h}\right), \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}\left(\boldsymbol{\theta}_h, \boldsymbol{\vartheta}_h\right)\right) = \bar{\boldsymbol{\vartheta}} \cdot \bar{\boldsymbol{B}}\bar{\boldsymbol{\theta}}$$

とかける．ただし，$\bar{\boldsymbol{K}} = \left(\bar{k}_{ij}\right)_{ij}$ と $\bar{\boldsymbol{B}} = \left(\bar{b}_{ij}\right)_{ij}$ は $d\,|\mathcal{N}| \times d\,|\mathcal{N}|$ 次の行列で

$$\bar{k}_{ij} = a\left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{L}}\left(\bar{\boldsymbol{\phi}}_i\right), \boldsymbol{E}_{\mathrm{L}}\left(\bar{\boldsymbol{\phi}}_j\right)\right)$$
$$\bar{b}_{ij}\left(\boldsymbol{u}_{0h}\right) = a\left(\boldsymbol{S}_{\mathrm{L}}\left(\boldsymbol{u}_{0h}\right), \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}\left(\bar{\boldsymbol{\phi}}_i, \bar{\boldsymbol{\phi}}_j\right)\right)$$

である．$\bar{\boldsymbol{\phi}}_i$ は，$i \in \{1, \cdots, d\} \times \mathcal{N}$ のとき $k \in \{1, \cdots, d\}$ の要素に ϕ_i があり，残りの要素を 0 とした d 次元ベクトルである．

§8 付録：線形座屈解析の理論 (cnt.)

ここで，基本境界条件 $\bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{D}} = \bar{\boldsymbol{\vartheta}}_{\mathrm{D}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ を代入して，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}^{\mathrm{T}} \\ \bar{\boldsymbol{\vartheta}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{DD}} & \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{DN}} \\ \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{ND}} & \bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{NN}} \end{pmatrix} + \zeta \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{DD}} & \bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{DN}} \\ \bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{ND}} & \bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{NN}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{D}} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{N}} \end{pmatrix} = 0 \quad (8.11)$$

となる．この式を並び替えれば

$$\bar{\boldsymbol{\vartheta}}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{T}} \left(\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{NN}} + \zeta \bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{NN}} \right) \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{N}} = 0$$

となる．$\bar{\boldsymbol{\vartheta}}_{\mathrm{N}}$ は任意であるので，

$$\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{NN}} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{N}} + \zeta \bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{NN}} \bar{\boldsymbol{\theta}}_{\mathrm{N}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad (8.12)$$

とかける．$\bar{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{NN}}$ と $\bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{NN}}$ は実対称行列なので，(8.12) は実固有値問題となる．

参考文献

[1] H. Azegami and K. Takeuchi.
A smoothing method for shape optimization: traction method using the Robin condition.
International Journal of Computational Methods, Vol. 3, No. 1, pp. 21–33, 2006.

[2] E. Katamine, H. Azegami, T. Tsubata, and S. Itoh.
Solution to shape optimization problems of viscous flow fields.
International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 19, No. 1, pp. 45–51, 1 2005.

[3] 竹内謙善, 古屋耕平.
H1 勾配法による位相最適化の一実装.
日本応用数理学会 2008 年研究部会連合発表会にて発表, 首都大学東京南大沢キャンパス, 2008.

[4] J. O. Sanders, R. H. Browne, S. J. McConnell, S. A. Margraf, T. E. Cooney, and D. N. Finegold.
Maturity assessment and curve progression in girls with idiopathic scoliosis.
J Bone Joint Surg Am., Vol. 89, No. 1, pp. 64–73, 1 2007.
doi:10.2106/JBJS.F.00067.

[5] 日本側彎症学会編, 川上紀明, 宇野 耕吉責任編集.
側弯症治療の最前線 基礎編.
医薬ジャーナル社, 4 2013.

[6] A. M. Arkin.
The mechanism of rotation in combination with lateral deviation in the normal spine.
J. Bone and Joint Surg., Vol. 32-A, pp. 180–188, 1 1950.

参考文献 (cnt.)

[7] E. W. Somerville.
Rotational lordosis: The development of the single curve.
J. Bone and Joint Surg., Vol. 34-B, pp. 421–427, 8 1952.

[8] R. Roaf.
Spinal Deformities.
J. B. Lippincott Company, Philadelphia and Toronto, 1977.

[9] I. A. F. Stokes, H. Spence, D. D. Aronsson, and N. Kilmer.
Mechanical modulation of vertebral body growth.
Spine, Vol. 21, pp. 1162–1167, 1996.

[10] D. B. Lucas and B. Bresler.
Stability of the ligamentous spine.
Biomechanics laboratory rpt., Univ. of California, San Francisco, 1961.

[11] T. Andriacchi, A. Schultz, T. Belytschko, and J. Galante.
A model for studies of mechanical interactions between the human spine and rib cage.
J. Biomechanics, Vol. 7, pp. 497–507, 1974.

[12] 篠田達明, 村地俊二.
こどもの生長と特発性そくわん症 - そくわん症の成因に関する考察 -.
こばと学園のあゆみ 6, pp. 11–32. 愛知県心身障害者コロニー, 1976.

[13] 篠田達明, 村地俊二.
特発性そくわん症のなりたち -いわゆる「鳥かご理論」について-.
こばと学園のあゆみ 7, pp. 4–12. 愛知県心身障害者コロニー, 1977.

参考文献 (cnt.)

[14] R. A. Dickson, J. O. Lawton, I. A. Archer, and W. P. Butt.
The pathogenesis of idiopathic scoliosis biplanar spinal asymmetry.
J. Bone and Joint Surg., Vol. 60-B, No. 1, pp. 8–15, 1984.

[15] J. E. Lonstein, R. B. Winter, D. S. Bradford, and J. W. Ogilvie.
Moe's textbook of scoliosis and other spinal deformities, 3rd edition.
Saunders, 1995.

[16] Y. C. Fung.
Biomechanics: Motion, Flow, Stress, and Growth.
Springer-Verlag, New York, 1990.

[17] 畔上秀幸, 村地俊二, 石田義人, 鈴木隆之, 川上紀明, 牧野光倫, 荒尾和彦, 鬼頭浩史.
特発性側彎症に関する数値シミュレーション.
脊柱変形, Vol. 10, No. 1, pp. 16–19, 1995.

[18] 畔上秀幸, 村地俊二, 鬼頭純三, 石田義人, 川上紀明, 牧野光倫.
特発性側彎症に関する数値シミュレーション - 胸郭モデルを用いた検討 -.
脊柱変形, Vol. 11, No. 1, pp. 9–12, 1996.

[19] H. Azegami, S. Murachi, J. Kitoh, Y. Ishida, N. Kawakami, and M. Makino.
Etiology of idiopathic scoliosis: Computational study.
Clinical Orthopaedics and Related Research, No. 357, pp. 229–236, 1998.

[20] 竹内謙善, 畔上秀幸, 村地俊二, 鬼頭純三, 石田義人, 川上紀明, 牧野光倫.
特発性側彎症の成因に関する数値シミュレーション - 数値モデルの精密化-.
脊柱変形, Vol. 14, No. 1, pp. 25–28, 1999.

参考文献 (cnt.)

[21] K.L. Markolf.
Deformation of the thoracolumbar interbertebral joints in response to external loads.
J. Bone and Joint Surg., Vol. 54-A, No. 3, pp. 511–533, apr 1972.

[22] A. B. Schultz, D. R. Benson, and C. Hirsch.
Force deformation properties of human cost-sternal and cost-vertebral articulations.
J. Biomechanics, Vol. 7, pp. 311–318, 1974.

[23] 日本エムエスシー株式会社.
MSC/NASTRAN ユーザーガイド 線形静解析 (V68), 1994.

[24] 竹内謙善, 畔上秀幸, 笹岡竜, 村地俊二, 鬼頭純三, 石田義人, 川上紀明, 後藤学, 牧野光倫, 松山幸弘.
特発性側彎症の成因に関する数値シミュレーション - 多様なモードの成因-.
脊柱変形, Vol. 16, No. 1, pp. 11–16, 2001.

[25] A. E. Nehme, E. J. Riseborough, and R. B. Reed.
Normal spine growth.
In Scoliosis 1979, pp. 103–109. Academic Press, 1980.

[26] 笹岡竜, 竹内謙善, 畔上秀幸, 村地俊二, 鬼頭純三, 石田義人, 川上紀明, 牧野光倫, 松山幸弘, 後藤学, 稲生秀文, 吉原永武.
脊柱特発性側彎症の成因に関する力学模型実験 - 精密な脊柱力学模型を用いた検討 -.
脊柱変形, 日本側彎症学会誌, Vol. 17, No. 1, pp. 18–22, 2002.

参考文献 (cnt.)

[27] R Sasaoka, H. Azegami, J.and Ishida Y.and Kawakami N. Murachi, S.and Kitoh, M. Makino, and Y. Matsuyama.
Investigation of buckling phenomenon induced by growth of vertebral bodies using a mechanical spine model.
JSME International Journal Series C, Vol. 46, No. 4, pp. 1382–1387, 12 2003.

[28] M. Goto, N. Kawakami, H. Azegami, Y. Matsuyama, K. Takeuchi, and R. Sasaoka.
Buckling and bone modeling as factors in the development of idiopathic scoliosis.
Spine, Vol. 28, No. Issue 4, pp. 364–370, 2 2003.

[29] K. Takeuchi, H. Azegami, S. Murachi, J. Kitoh, Y. Ishida, N. Kawakami, and M. Makino.
Study on treatment with respect to idiopathic scoliosis: Sensitivity analysis based on buckling theory.
JSME International Journal Series C, Vol. 44, No. 4, pp. 1059–1064, 12 2001.

[30] R. Sasaoka and H. Azegami.
Construction of finite-element models conforming to prescribed boundary shapes.
日本計算工学会論文集, No. 200500002, pp. 1–6, 1 2005.
(Paper No.200500002 published January 21, 2005).