平成 24 年度 幾何学要論 I — 曲線と曲面の幾何 —

1. $\mathbb{R}^3$ 内の曲線

1.1. **曲線の定義.**

例. (曲線の表示法)　円

(i) $C\colon x^2+y^2-1=0$　陰関数表示
(ii) $C\colon y=\pm\sqrt{1-x^2}\ \ (-1\le x\le 1)$　グラフ表示
(iii) $C\colon x=\cos t, y=\sin t\ \ (0\le t\le 2\pi)$　パラメータ表示

定義 1.1.　写像 $\gamma\colon [a,b]\to\mathbb{R}^n;\ t\mapsto\gamma(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$ が **(滑らかな) 曲線 (のパラメータ付け)** であるとは, γ が以下の条件をみたすことである:

(i) $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ は C^∞ 級関数.
(ii) $x_1'(t),x_2'(t),\cdots,x_n'(t)$ は同時に零にならない.

$C=\gamma([a,b])$ (γ の像) とおく.

例.　(1)　$a\neq 0$
$\gamma\colon(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}^3;\ t\mapsto(a\cos t,a\sin t,bt)$　常螺旋

(2) (条件 (ii) に関連)
$\gamma\colon[-1,1]\to\mathbb{R}^2;\ t\mapsto(t^2,t^3)$
$x_1'(t)=2t$, $x_2'(t)=3t^2$ であるから, $x_1'(0)=x_2'(0)=0$
$x=t^2$, $y=t^3$ とおくと, $0\le x\le 1$, $y=\begin{cases} x^{3/2} & (t\ge 0)\\ -x^{3/2} & (t<0)\end{cases}$
C は原点で尖っている.

定義 1.2.　$\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ を曲線とする. 写像 $\widetilde{\gamma}\colon[\widetilde{a},\widetilde{b}]\to\mathbb{R}^n$ が γ の**向きを保つ (向きを逆にする) 再パラメータ付け**であるとは, C^∞ 関数 $h\colon[\widetilde{a},\widetilde{b}]\to[a,b]$ で $h'>0$, $h(\widetilde{a})=a$, $h(\widetilde{b})=b$ ($h'<0$, $h(\widetilde{a})=b$, $h(\widetilde{b})=a$) をみたすものが存在して, $\widetilde{\gamma}(\widetilde{t})=\gamma(h(\widetilde{t}))$ ($\widetilde{a}\le\widetilde{t}\le\widetilde{b}$) が成り立つことである.

定義 1.3. ($\mathbb{R}^n$ の接空間)　$\mathbb{R}^n$ のベクトル $\mathbf{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in\mathbb{R}^n$ の始点を $p\in\mathbb{R}^n$ にとったものを $\mathbf{v}_p$ で表す.
$p\in\mathbb{R}^n$ に対して, $T_p\mathbb{R}^n\overset{\mathrm{def}}{=}\{\mathbf{v}_p\mid\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n\}$ のことを p における $\mathbb{R}^n$ の**接空間**とよび, $T_p\mathbb{R}^n$ の元を p における $\mathbb{R}^n$ の**接ベクトル**とよぶ.
$T_p\mathbb{R}^n$ は, 演算規則 $\mathbf{v}_p+\mathbf{w}_p=(\mathbf{v}+\mathbf{w})_p$, $\lambda(\mathbf{v}_p)=(\lambda\mathbf{v})_p$ によりベクトル空間となる. さらに, $\langle\mathbf{v}_p,\mathbf{w}_p\rangle=\langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle$ により, 内積空間となる.

定義 1.4.　$\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n;\ t\mapsto(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))$　曲線
$\gamma'(t)=(x_1'(t),x_2'(t),\cdots x_n'(t))_{\gamma(t)}\in T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n$　**速度ベクトル**

$\neq (0,0,\cdots,0)$ $\leftarrow$ 定義 1.1 の条件 (ii)
$||\gamma'(t)|| = \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}$ **速さ (速度)**
説明.

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\gamma(t+\Delta t)-\gamma(t)}{\Delta t}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{x_1(t+\Delta t)-x_1(t)}{\Delta t},\cdots\right)\end{aligned}$$

$T_{\gamma(t)}C \overset{\text{def}}{=} \{\lambda\gamma'(t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ は $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n$ の 1 次元部分空間である. $T_{\gamma(t)}C$ のことを $\gamma(t)$ における C の**接線**とよび, $T_{\gamma(t)}C$ の元を $\gamma(t)$ における C の**接ベクトル**とよぶ.

1.2. 曲線の長さと弧長パラメータ.

定義 1.5. 曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ の**長さ** $L(\gamma)$ を $L(\gamma) = \displaystyle\int_a^b ||\gamma'(t)||\,dt$ によって定義する.

例. $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3;\ t \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt)$ 常螺旋
$\gamma'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$, $||\gamma'(t)|| = \sqrt{a^2+b^2} =: l$
$L(\gamma) = \displaystyle\int_0^{2\pi} l\,dt = 2\pi l = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$
$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3;\ t \mapsto (a\cos 2\pi t, a\sin 2\pi t, 2\pi bt)$ として計算しても同じ値になる.

命題 1.6. $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ を曲線とし, $\widetilde{\gamma}\colon [\widetilde{a},\widetilde{b}] \to \mathbb{R}^n$ を γ の再パラメータ付けとするとき, $L(\gamma) = L(\widetilde{\gamma})$ が成り立つ. すなわち, 曲線の長さはパラメータ付けの取り方に依らずに定まる.

証明. $\widetilde{\gamma}$ は向きを保つとし, h を定義 1.2 における関数とする.
$\widetilde{\gamma}'(\widetilde{t}) = \gamma'(h(\widetilde{t}))h'(\widetilde{t})$, $||\widetilde{\gamma}'(\widetilde{t})|| = ||\gamma'(h(\widetilde{t}))||h'(\widetilde{t})$
である. $t = h(\widetilde{t})$ として置換積分すると,
$$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\,dt = \int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}} ||\gamma'(h(\widetilde{t}))||h'(\widetilde{t})\,d\widetilde{t} = \int_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}} ||\widetilde{\gamma}'(\widetilde{t})||\,d\widetilde{t} = L(\widetilde{\gamma}). \qquad \square$$
与えられた曲線の再パラメータ付けは無数にある. その中から最も自然なものを取り出したい.
$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 曲線

この s を変数にとって γ を新たにパラメータ付けることを考える.

例. (上の例の続き)
$s = s(t) = \displaystyle\int_0^t ||\gamma'(u)||\,du = lt$, $t = \dfrac{s}{l}$
$\gamma(t) = \gamma(s/l) = \left(a\cos\dfrac{s}{l}, a\sin\dfrac{s}{l}, b\dfrac{s}{l}\right) =: \widetilde{\gamma}(s)$ $(0 \le s \le 2\pi l)$
一般の場合 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 曲線
$s(t) = \displaystyle\int_a^t ||\gamma'(u)||\,du$
$s(a) = 0$, $s(b) = L(\gamma)$, $s'(t) = ||\gamma'(t)|| > 0$ $\therefore$ $s(t)$ は t について狭義単調増加

関数 $t \mapsto s(t)$ の逆関数を $h\colon [0, L(\gamma)] \to [a,b]$ とする.
$\widetilde{\gamma}\colon [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^3;\ s \mapsto \gamma(h(s))$ と定めると $\widetilde{\gamma}$ は γ の再パラメータ付けである.

$\widetilde{\gamma}'(s) = \gamma'(h(s))h'(s) = \gamma'(h(s))s'(h(s))^{-1} = \gamma'(t(s))||\gamma'(t(s))||^{-1}$
$\therefore\ ||\widetilde{\gamma}'(s)|| = 1$　すなわち, 速さ 1 の等速運動

定義 1.7.　曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ のパラメータ t が**弧長パラメータ**
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$　$||\gamma'(t)|| = 1\ \ (a \le t \le b)$

命題 1.8.　任意の曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ に対して, γ の向きを保つ再パラメータ付けで, パラメータが弧長パラメータであるものが存在する.

注.　定義 1.7 の状況で $t = s(t) + a$. とくに, $b = L(c) + a$.

問.　(1) 放物線 $y = \dfrac{x^2}{2}$ $(0 \le x \le 1)$ を $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2; t \mapsto (t, t^2/2)$ によってパラメータ付けたとき, $s(t)$ を求めよ.

不定積分の公式: $\displaystyle\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left\{t\sqrt{1+t^2} + \log\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right\}$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\left\{t\sqrt{1+t^2} + \log(t + \sqrt{1+t^2})\right\}$$

(2) 楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を適当にパラメータ表示し, $0 < b < a$ のときに $s(t)$ を求めよ.

$$s(t) = a\int_0^t \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 u}\,du$$

ε を楕円の**離心率**とよぶ. この積分は初等関数によって表示できない. 楕円積分とよばれる.

1.3. **曲率と捩率.**

定義 1.9.　曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 上の**ベクトル場** $\mathbb{Y}$ とは, 各 $t \in [a,b]$ に $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n$ の元 $\mathbb{Y}(t)$ を対応させる規則で, $\mathbb{Y}(t) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t))_{\gamma(t)}$ と表したとき, $y_1(t), y_2(t), \cdots, y_n(t)$ がすべて C^∞ 級関数であるものである.
$\mathbb{Y}(t) \in T_{\gamma(t)}C$ $({}^\forall t)$ のとき, $\mathbb{Y}$ を**接ベクトル場**とよび, $\mathbb{Y}(t) \perp T_{\gamma(t)}C$ $({}^\forall t)$ のとき, **法ベクトル場**とよぶ.

補題 1.10.　$\mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ を曲線 $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ 上のベクトル場とするとき,
$\langle \mathbb{Y}(t), \mathbb{Z}(t)\rangle' = \langle \mathbb{Y}'(t), \mathbb{Z}(t)\rangle + \langle \mathbb{Y}(t), \mathbb{Z}'(t)\rangle$
が成り立つ.
とくに, $\mathbb{Y}$ の長さが一定ならば, $\langle \mathbb{Y}'(t), \mathbb{Y}(t)\rangle = 0$ となる.
すなわち, 各 t に対して $\mathbb{Y}'(t)$ と $\mathbb{Y}(t)$ は直交する.

証明. $\mathbb{Y}(t) = (y_1(t), \cdots, y_n(t))_{\gamma(t)}$, $\mathbb{Z}(t) = (z_1(t), \cdots, z_n(t))_{\gamma(t)}$ と表すと,
$\mathbb{Y}'(t) = (y_1'(t), \cdots, y_n'(t))_{\gamma(t)}$ 等であり,

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{Y}(t), \mathbb{Z}(t) \rangle' &= (y_1(t)z_1(t) + \cdots + y_n(t)z_n(t))' \\ &= (y_1'(t)z_1(t) + y_1(t)z_1'(t)) + \cdots + (y_n'(t)z_n(t) + y_n(t)z_n'(t)) \\ &= \langle \mathbb{Y}'(t), \mathbb{Z}(t) \rangle + \langle \mathbb{Y}(t), \mathbb{Z}'(t) \rangle. \end{aligned}$$

□

以下, $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ を曲線とし, γ のパラメータは弧長パラメータであるとする.

定義 1.11. $\gamma''(s) \neq 0$ $({}^\forall s)$ と仮定する.
$\mathbf{e}(s) = \gamma'(s)$ と定めると, $||\mathbf{e}(s)|| = 1$ であり, $\mathbf{e}$ は γ 上の接ベクトル場である. $\mathbf{e}$ のことを γ 上の**単位接ベクトル場**とよぶ.
補題1.10 により, $\mathbf{e}'(s)$ $(= \gamma''(s) \neq 0)$ は $\mathbf{e}(s)$ に直交するので, $\mathbf{n}(s) = \dfrac{\mathbf{e}'(s)}{||\mathbf{e}'(s)||} \left(= \dfrac{\gamma''(s)}{||\gamma''(s)||} \right)$ と定めると, $||\mathbf{n}(s)|| = 1$ であり, $\mathbf{n}$ は γ 上の法ベクトル場である. $\mathbf{n}$ のことを γ 上の**主法線ベクトル場**とよぶ.
$\mathbf{b}(s) = \mathbf{e}(s) \times \mathbf{n}(s)$ と定めると, $||\mathbf{b}(s)|| = 1$ であり, $\mathbf{b}$ も γ 上の法ベクトル場である. $\mathbf{b}$ のことを γ 上の**従法線ベクトル場**とよぶ.
各 s に対して $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ は $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である. 三つ組 $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ のことを γ 上の**フルネ枠場**とよぶ.

定義 1.12. (曲率と捩率) $\kappa(s) = ||\mathbf{e}'(s)|| (= ||\gamma''(s)||)$ を**曲率**という. $\kappa(s) \geq 0$ である.
以下, $\gamma''(s) \neq 0$ $({}^\forall s)$ と仮定する. このとき, $\kappa(s) > 0$ であり, $\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$ とかける.
また, 次の補題 1.13 により, $\mathbf{n}'(s) = \tau(s)\mathbf{b}(s) - \kappa(s)\mathbf{e}(s)$ とかける. $\tau(s)$ のことを**捩率**という.

補題 1.13. $\mathbf{n}'(s) = \tau(s)\mathbf{b}(s) - \kappa(s)\mathbf{e}(s)$

証明. $\mathbf{n}'(s) = \varphi(s)\mathbf{e}(s) + \psi(s)\mathbf{n}(s) + \tau(s)\mathbf{b}(s)$ とかける.
まず, 補題1.10 により, $0 = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \psi(s)$ となる.
次に, $0 = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{e}(s) \rangle' = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{e}(s) \rangle + \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{e}'(s) \rangle = \varphi(s) + \kappa(s)$ より, $\varphi(s) = -\kappa(s)$ を得る. □

注. $\tau(s) = \langle \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) \rangle$

定理 1.14. (フルネ・セレの公式) $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ を曲線とし, γ のパラメータは弧長パラメータであるとする. また, $\gamma''(s) \neq 0$ $({}^\forall s)$ と仮定する. このとき, 次の 3 式が成り立つ:
$\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$
$\mathbf{n}'(s) = \tau(s)\mathbf{b}(s) - \kappa(s)\mathbf{e}(s)$
$\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$
まとめて書くと,

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{pmatrix}$$

証明.　$\mathbf{b}'(s)=\varphi(s)\mathbf{e}(s)+\psi(s)\mathbf{n}(s)$ とかける.
$0=\langle\mathbf{b}(s),\mathbf{e}(s)\rangle'=\langle\mathbf{b}'(s),\mathbf{e}(s)\rangle+\langle\mathbf{b}(s),\mathbf{e}'(s)\rangle=\varphi(s)$
および $0=\langle\mathbf{b}(s),\mathbf{n}(s)\rangle'=\langle\mathbf{b}'(s),\mathbf{n}(s)\rangle+\langle\mathbf{b}(s),\mathbf{n}'(s)\rangle=\psi(s)+\tau(s)$
より, $\varphi(s)=0$, $\psi(s)=-\tau(s)$ を得る. □

1.4. 一般のパラメータに関する曲率・捩率の表示.

定義 1.15. $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^3$　曲線
$^\forall t$ において, $\gamma''(t)$ は $\gamma'(t)$ に平行でないと仮定する.
$\widetilde{\gamma}\colon[0,L(c)]\to\mathbb{R}^3$　γ の弧長パラメータによる再パラメータ付け

> 復習:
> $s(t)=\displaystyle\int_a^t||\gamma'(u)||\,du$
> $t\in[a,b]\mapsto s(t)\in[0,L(c)]$ の逆関数を $s\in[0,L(c)]\mapsto h(s)\in[a,b]$
> $\widetilde{\gamma}(s)=\gamma(h(s))\ \Leftrightarrow\ \widetilde{\gamma}(s(t))=\gamma(t)$

曲線 C (γ の像) の点 $\gamma(t)$ における単位接ベクトル, 主・従法線ベクトル, 曲率, 捩率を, 弧長パラメータによって再パラメータ付けた C の点 $\widetilde{\gamma}(s(t))$ におけるそれらとして定義する.
すなわち,
$\mathbf{e}(t)\overset{\text{def}}{=}\widetilde{\mathbf{e}}(s(t))$,　$\mathbf{n}(t)\overset{\text{def}}{=}\widetilde{\mathbf{n}}(s(t))$,　$\mathbf{b}(t)\overset{\text{def}}{=}\widetilde{\mathbf{b}}(s(t))$,　$\kappa(t)\overset{\text{def}}{=}\widetilde{\kappa}(s(t))$,　$\tau(t)\overset{\text{def}}{=}\widetilde{\tau}(s(t))$
(パラメータ表示の取り方に依らずに定まるようにするには, このように定義するしかない.)

定理 1.16.　$\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^3$　曲線
$^\forall t$ において, $\gamma''(t)$ は $\gamma'(t)$ に平行でないと仮定する.
$C=\gamma([a,b])$
C の $\gamma(t)$ における単位接ベクトル, 主・従法線ベクトル, 曲率, 捩率は次で与えられる.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e} &= \frac{\gamma'}{||\gamma'||}\\
\mathbf{n} &= \frac{\langle\gamma',\gamma'\rangle\gamma''-\langle\gamma',\gamma''\rangle\gamma'}{||\langle\gamma',\gamma'\rangle\gamma''-\langle\gamma',\gamma''\rangle\gamma'||}=\frac{(\gamma'\times\gamma'')\times\gamma'}{||(\gamma'\times\gamma'')\times\gamma'||}\\
\mathbf{b} &= \frac{\gamma'\times\gamma''}{||\gamma'\times\gamma''||}\\
\kappa &= \frac{||\gamma'\times\gamma''||}{||\gamma'||^3}\\
\tau &= \frac{\langle\gamma'\times\gamma'',\gamma'''\rangle}{||\gamma'\times\gamma''||^2}=\frac{\det(\gamma',\gamma'',\gamma''')}{||\gamma'\times\gamma''||^2}
\end{aligned}
$$

注.　$\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{e}$

証明. $\widetilde{\gamma}'(s(t))s'(t) = \gamma'(t) \quad \therefore\ \mathbf{e}(t) = \widetilde{\mathbf{e}}(s(t)) = \dfrac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}$

$\widetilde{\mathbf{e}}'(s(t))s'(t) = \left(\dfrac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}\right)' \quad \therefore$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbf{e}}'(s(t)) &= \frac{1}{||\gamma'(t)||}\left(\frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}\right)' \\
&= \frac{||\gamma'(t)||^2\gamma''(t) - \langle\gamma'(t), \gamma''(t)\rangle\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||^4} \\
&= \frac{(\gamma'(t)\times\gamma''(t))\times\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||^4} \quad (\langle\mathbf{c},\mathbf{a}\rangle\mathbf{b} - \langle\mathbf{c},\mathbf{b}\rangle\mathbf{a} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c})
\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathbf{n}(t) = \widetilde{\mathbf{n}}(s(t)) = \dfrac{\widetilde{\mathbf{e}}'(s(t))}{||\widetilde{\mathbf{e}}'(s(t))||} = \dfrac{(\gamma'(t)\times\gamma''(t))\times\gamma'(t)}{||(\gamma'(t)\times\gamma''(t))\times\gamma'(t)||}$

$\kappa(t) = \widetilde{\kappa}(s(t)) = ||\widetilde{\mathbf{e}}'(s(t))|| = \dfrac{||\gamma'(t)\times\gamma''(t)||}{||\gamma'(t)||^3}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(t) &= \widetilde{\mathbf{b}}(s(t)) = \widetilde{\mathbf{e}}(s(t))\times\widetilde{\mathbf{n}}(s(t)) = \mathbf{e}(t)\times\mathbf{n}(t) \\
&= \frac{\gamma'(t)}{||\gamma'(t)||}\times\frac{||\gamma'(t)||^2\gamma''(t) - \langle\gamma'(t), \gamma''(t)\rangle\gamma'(t)}{||\gamma'(t)\times\gamma''(t)||\,||\gamma'(t)||} \\
&= \frac{||\gamma'(t)||^2\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{||\gamma'(t)||^2||\gamma'(t)\times\gamma''(t)||} = \frac{\gamma'(t)\times\gamma''(t)}{||\gamma'(t)\times\gamma''(t)||}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau(t) &= \widetilde{\tau}(s(t)) = \langle\widetilde{\mathbf{n}}'(s(t)), \widetilde{\mathbf{b}}(s(t))\rangle \\
&= \frac{1}{||\gamma'(t)||}\langle\mathbf{n}'(t), \mathbf{b}(t)\rangle \\
&= \frac{1}{||\gamma'(t)||\,||\gamma'(t)\times\gamma''(t)||}\langle\mathbf{n}'(t), \gamma'(t)\times\gamma''(t)\rangle \\
&= \frac{1}{||\gamma'(t)||\,||\gamma'(t)\times\gamma''(t)||}\times\frac{||\gamma'(t)||^2}{||(\gamma'(t)\times\gamma''(t))\times\gamma'(t)||}\times\langle\gamma'''(t), \gamma'(t)\times\gamma''(t)\rangle \\
&= \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{||\gamma'(t)\times\gamma''(t)||^2}
\end{aligned}$$

三番目の等号で

$\mathbf{n}'(t) = (\widetilde{\mathbf{n}}(s(t)))' = \widetilde{\mathbf{n}}'(s(t))s'(t) \quad \therefore\ \widetilde{\mathbf{n}}'(s(t)) = \dfrac{\mathbf{n}'(t)}{||\gamma'(t)||}$

を使った. また, 五番目の等号で

$\mathbf{n}(t) = a(t)\gamma''(t) + b(t)\gamma'(t)$ と書くと, $\mathbf{n}'(t) = a(t)\gamma'''(t) + [\gamma'(t)\times\gamma''(t)$ に直交する部分$]$ となることを使った. ($a(t)$ は $\mathbf{n}(t)$ の最初の表示式から読み取れる.) $\square$

1.5. **曲率・捩率の意味.**

$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ を曲線とし, γ のパラメータは弧長パラメータであるとする. また, $\gamma''(s) \neq 0$ $({}^\forall s)$ と仮定する.

$C = \gamma([a,b])$.

$s_0 \in [a,b]$ の近くで γ をよく近似する「3 次曲線」を考える.
簡単のために $s_0 = 0 \in (a,b)$ とする.

定理 1.17.

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \left(s - \frac{1}{6}s^3\kappa(0)^2\right)\mathbf{e}(0) + \left(\frac{1}{2}s^2\kappa(0) + \frac{1}{6}s^3\kappa'(0)\right)\mathbf{n}(0) + \frac{1}{6}s^3\kappa(0)\tau(0)\mathbf{b}(0) + o(s^3)$$

ブーケの公式

注. $f(s) = o(s^3) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{s\to 0} f(s)/s^3 = 0$

証明. 0 のまわりのテーラー展開を考える.
$x(s) = x(0) + x'(0)s + \dfrac{1}{2}x''(0)s^2 + \dfrac{1}{6}x'''(0)s^3 + o(s^3)$
$\cdots\cdots$
これらの式をまとめて書くと

$$\begin{aligned}\gamma(s) &= \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{1}{2}s^2\gamma''(0) + \frac{1}{6}s^3\gamma'''(0) + o(s^3)\\ &= \gamma(0) + s\mathbf{e}(0) + \frac{1}{2}s^2\kappa(0)\mathbf{n}(0) + \frac{1}{6}s^3\gamma'''(0) + o(s^3)\end{aligned}$$

フルネ・セレの公式 ($\mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{e} + \tau\mathbf{b}$) により
$\gamma''' = (\kappa\mathbf{n})' = \kappa'\mathbf{n} + \kappa\mathbf{n}' = -\kappa^2\mathbf{e} + \kappa'\mathbf{n} + \kappa\tau\mathbf{b}$
この式を上の式に代入すると定理の展開式を得る. $\square$

定義 1.18. $\hat{\gamma}(s) = \gamma(0) + s\mathbf{e}(0) + \dfrac{1}{2}s^2\kappa(0)\mathbf{n}(0) + \dfrac{1}{6}s^3\kappa(0)\tau(0)\mathbf{b}(0)$
とおき, γ の $s = 0$ のまわりの**フルネ近似**とよぶ.

最初の 2 項は C の $\gamma(0)$ における接線 $s \mapsto \gamma(0) + s\mathbf{e}(0)$ を与える. これは γ の $\gamma(0)$ の近くでの最良の線形近似 (1 次近似) である.

最初の 3 項は放物線 $s \mapsto \gamma(0) + s\mathbf{e}(0) + \frac{1}{2}s^2\kappa(0)\mathbf{n}(0)$ を与える. これは γ の $\gamma(0)$ の近くでの最良の 2 次近似である.

注. (1) この放物線は, $\gamma(0)$ を通り $\mathbf{b}(0)$ に直交する平面内にある. この平面を C の $\gamma(0)$ における**接触平面** (osculating plane) とよぶ.
(2) この放物線の形は, xy 平面内の放物線 $y = \dfrac{\kappa(0)}{2}x^2$ と同じであり, C の $\gamma(0)$ における曲率によって完全に決定される.

捩率 $\tau(0)$ は, $\hat{\gamma}$ の最後かつ最小の項に現れ, $\gamma(0)$ における接触平面に直交する方向への C の動きを表している.

例. $\gamma\colon (-\infty,\infty) \to \mathbb{R}^3$; $\gamma(s) = (\cos s/\sqrt{2}, \sin s/\sqrt{2}, s/\sqrt{2})$

命題 1.19. $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ を曲線とし, γ のパラメータは弧長パラメータであるとする. C の曲率が恒等的に零であれば, C は線分である.

よって, 曲率は直線からのずれを測っている.

証明. $\kappa(s) = ||\mathbf{e}'(s)|| = ||\gamma''(s)||$ であるから, $\kappa \equiv 0$ ならば $\gamma'' \equiv 0$ である. $\square$

1.6. **曲線論の基本定理.**

与えられた曲率と捩率をもつ $\mathbb{R}^3$ 内の曲線が存在し, しかも「本質的に」一意的である.

定義 1.20. $\mathbb{R}^3$ の全単射 $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ が**合同変換**
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $||\varphi(x)-\varphi(y)|| = ||x-y||$ $(x, y \in \mathbb{R}^3)$
すなわち, φ が任意の 2 点間の距離を保つ.
$\Leftrightarrow$ $\varphi(x) = Ux + q$ $(x \in \mathbb{R}^3)$
U は直交行列 (すなわち, ${}^tUU = U{}^tU = I$), $q \in \mathbb{R}^3$
と表される.
また, (一般に $\det U = \pm 1$ であるが) $\det U = 1$ のとき, φ は**向きを保つ**という.

定理 1.21. $\varphi(s), \psi(s)$ 区間 $[a,b]$ で定義された二つの C^∞ 級関数, $\varphi(s) > 0$ $({}^\forall s)$ とする
$\Rightarrow$ ${}^\exists\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ パラメータが弧長パラメータである曲線
s.t. $\kappa(s) = \varphi(s), \tau(s) = \psi(s)$
さらに, そのような曲線 γ は向きを保つ合同変換を除いて一意的である.

定理の証明は, 1 階線形常微分方程式の初期値問題の解の一意存在を用いることによってなされる. 詳細は割愛する. 平面曲線の場合については, cf. 演習問題 $\boxed{6}$, $\boxed{7}$ (および $\boxed{5}$).

2. $\mathbb{R}^3$ 内の曲面

2.1. **曲線の定義と例, 接平面, 単位法ベクトル.**

定義 2.1. $\mathbb{R}^3$ 内の **(滑らかな) 曲面**とは, $\mathbb{R}^3$ の部分位相空間 S で次の性質をもつものである: 任意の $p \in S$ に対して, S の p を含む開集合 U, $\mathbb{R}^2$ の連結な開集合 D, および写像 $f\colon D \to \mathbb{R}^3$; $(u,v) \mapsto f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ で以下の条件をみたすものが存在する:

(i) $f(D) = U$ で, $f\colon D \to U$ は同相写像である.
(ii) $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ は C^∞ 級関数.
(iii) ${}^\forall(u,v) \in D$ に対して, 二つのベクトル
$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v), \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right)$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v), \frac{\partial y}{\partial v}(u,v), \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)$$
は一次独立.

写像 $f\colon D \to U$ のことを S の (開集合 U の) **局所パラメータ付け**とよび, (u,v) を S の (開集合 U の) **局所パラメータ**とよぶ. ($U = S$ のときは, 単に S のパラメータ付け, パラメータとよぶ.)

以後, $\dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial u}, \cdots$ を $f_u, x_u, \cdots$ と記す.

例.

(1) (関数のグラフ)　$z=\varphi(x,y)$　$((x,y)\in D)$　C^∞ 関数
$S=\{(x,y,\varphi(x,y))\mid (x,y)\in D\}$ は $f\colon D\to\mathbb{R}^3;\ (x,y)\mapsto(x,y,\varphi(x,y))$ をパラメータ付けとする曲面.

(1-1)　$z=ax^2+by^2$　$(a,b>0)$　楕円放物面
　　　$z=ax^2-by^2$　$(a,b>0)$　双曲放物面

(1-2)　$z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$　$(r>0, x^2+y^2<r^2)$
原点中心, 半径 r の球面の上半分 (開半球面)
北半球 (赤道を含まない) に対応

(2) (球面)

$D=\{(\theta,\varphi)\mid 0<\theta<\pi, 0<\varphi<2\pi\}$
$f\colon D\to\mathbb{R}^3;\ (\theta,\varphi)\mapsto(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$
$U=f(D)$ は球面から図の赤線を除いた部分

(3) (トーラス)　$R>r>0$

$D=\{(\theta,\varphi)\mid 0<\theta<2\pi, 0<\varphi<2\pi\}$
$f\colon D\to\mathbb{R}^3;\ (\theta,\varphi)\mapsto((R+r\cos\theta)\cos\varphi, (R+r\cos\theta)\sin\varphi, r\sin\theta)$
$U=f(D)$ はトーラスから図の赤線を除いた部分

$f_u(u,v), f_v(u,v)$ の意味

定義 2.2. $f\colon D\to U$ (U は S の開集合) を S の局所パラメータ付けとし, $p=f(u,v)\in S$ とする. $f_u(u,v)_p, f_v(u,v)_p$(一次独立) の張る $T_p\mathbb{R}^3$ の 2 次元部分空間を T_pS で表す: $T_pS=\{af_u(u,v)_p+bf_v(u,v)_p\mid a,b\in\mathbb{R}\}$. T_pS のことを p における S の**接平面**という. また, その元を p における S の**接ベクトル**という.

定義 2.3.　曲面 S 上の**曲線**とは, 曲線 $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^3$ で $\gamma([a,b])\subset S$ をみたすもののことである. 以後, $\gamma\colon[a,b]\to S$ と表す.

補題 2.4.　$\gamma\colon[a,b]\to S$ を曲面 S 上の曲線とし, $t_0\in(a,b)$ とする. また, $f\colon D\to U$ を, $\gamma(t_0)$ を含む S の開集合 U の局所パラメータ付けとし, $\gamma((t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon))\subset U$ がみたされるとする. このとき, D 内の曲線 $\gamma_0\colon(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\to D$ で, $f(\gamma_0(t))=\gamma(t)$ $({}^\forall t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon))$ をみたすものが存在する.

図で説明. γ_0 の微分可能性が自明でないことを注意.

命題 2.5.　曲面 S の $p\in S$ における接平面 T_pS は次のように表される:

$$T_pS=\{\gamma'(0)\mid \gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to S \text{ は } \gamma(0)=p \text{ をみたす } S \text{ 上の曲線}\}.$$

とくに, 任意の $\mathbf{v}\in T_pS$ に対して, S 上の曲線 $\gamma\colon(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ で, $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0)=\mathbf{v}$ をみたすものが存在する. また, T_pS の定義は p のまわりの局所パラメータ付けの取り方によらない.

証明. まず $\supset$ を示す. $\gamma\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ を S 上の曲線とし, $f\colon D\to U$ を, $\gamma(0)$ を含む S の開集合 U の局所パラメータ付けとする. 必要ならば ε を小さく取り直すことにより, $\gamma((-\varepsilon,\varepsilon))\subset U$ としてよい. $\gamma_0\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\to D$ を補題 2.4 の曲線とし, $\gamma_0(t)=(u(t),v(t))$ と書くと, $\gamma'(0)=f_u(u(0),v(0))u'(0)+f_v(u(0),v(0))v'(0)$ となり, これは T_pS の元である.

次に $\subset$ を示す. 任意の $\mathbf{v}\in T_pS$ は $\mathbf{v}=af_u(u,v)+bf_v(u,v)$ と表せる (cf. 定義 2.2). そこで, $\gamma_0\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\to D$ を $\gamma_0(t)=(u+at,v+bt)$ によって定義し, $\gamma=f\circ\gamma_0$ とおくと, $\gamma'(0)=f_u(u,v)a+f_v(u,v)b=\mathbf{v}$. $\square$

定義 2.6. (1) S 上の C^∞ **級関数**とは, S 上の実数値関数 φ で, S の任意の局所パラメータ付け $f\colon D\to U$ に対して, $\varphi\circ f$ が D 上の C^∞ 級関数であるものである.

(2) S 上の**ベクトル場** $\mathbb{Y}$ とは, 各 $p\in S$ に $\mathbb{Y}_p\in T_p\mathbb{R}^3$ を対応させる規則で, $\mathbb{Y}$ の各成分関数が S 上の C^∞ 級関数であるものである. すべての $p\in S$ に対して $\mathbb{Y}(p)\in T_pS$ であるとき**接ベクトル場**といい, すべての $p\in S$ に対して $\mathbb{Y}(p)\perp T_pS$ であるとき**法ベクトル場**という.

定義 2.7. S 上の**単位法ベクトル場**とは, S 上の法ベクトル場 $\mathbb{N}$ で, すべての $p\in S$ に対して $||\mathbb{N}(p)||=1$ をみたすものである. S 上の単位法ベクトル場が存在するとき, S は**向き付け可能**であるという.

注. (1) S が向き付け可能であるとし, $\mathbb{N}$ を S 上の単位法ベクトル場とする. $f\colon D\to U$ を S の局所パラメータ付けとするとき, $\mathbb{N}(p)=\pm\dfrac{f_u(u,v)\times f_v(u,v)}{||f_u(u,v)\times f_v(u,v)||}$ $(p=f(u,v))$ が成り立つ.

(2) パラメータの順序を逆にすることにより, (1) の式の符号を $+$ にできる. 以後, パラメータの順序はつねにそのようにとっておく.

$$\widetilde{D}=\{(v,u)\mid (u,v)\in D\},\quad \iota\colon \widetilde{D}\to D;\ (v,u)\mapsto(u,v)$$
$$\widetilde{f}=f\circ\iota\colon \widetilde{D}\to U;\ (v,u)\mapsto \widetilde{f}(v,u)=f(u,v)$$
$$\widetilde{f}_v(v,u)\times\widetilde{f}_u(v,u)=f_v(u,v)\times f_u(u,v)=-f_u(u,v)\times f_v(u,v)$$
$$\frac{\widetilde{f}_u(u,v)\times\widetilde{f}_v(u,v)}{||\widetilde{f}_u(u,v)\times\widetilde{f}_v(u,v)||}=-\frac{f_u(u,v)\times f_v(u,v)}{||f_u(u,v))\times f_v(u,v)||}$$

例. (1) これまでにあげた曲面の例はすべて向き付け可能. 例えば, 関数のグラフには上下があり, 球面, トーラス, n 人乗りの浮き輪には内側, 外側がある. したがって, 裏表がある.

(2) メービウスの帯, クラインの壷は向き付け不可能.

2.2. **線形代数からの準備.**

V を有限次元実ベクトル空間とし, $n=\dim V$ とおく.

定義 2.8. 関数 $\Phi\colon V\times V\to\mathbb{R}$ が**双線形形式**であるとは, 任意の $v_1\in V$ に対して $v_2\in V\mapsto\Phi(v_1,v_2)\in\mathbb{R}$ が線形であり, 任意の $v_2\in V$ に対して $v_1\in V\mapsto\Phi(v_1,v_2)\in\mathbb{R}$ が線形であることである. さらに任意の v_1,v_2 に対して $\Phi(v_1,v_2)=\Phi(v_2,v_1)$ がみたされるときに Φ は**対称**であるという.

以下, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を内積空間とする.

例. 内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R};\ (v_1, v_2) \mapsto \langle v_1, v_2 \rangle$ は対称な双線形形式である. また, $T \colon V \to V$ を線形写像とすると, $\Phi \colon V \times V \to \mathbb{R};\ (v_1, v_2) \mapsto \langle Tv_1, v_2 \rangle$ は双線形形式である.

定義 2.9. 線形写像 $T \colon V \to V$ が**対称**であるとは, 手前の例の双線形形式 Φ が対称であること, すなわち任意の $v_1, v_2 \in V$ に対して $\langle Tv_1, v_2 \rangle = \langle v_1, Tv_2 \rangle$ が成り立つことである.

注. $\Phi \colon V \times V \to \mathbb{R}$ を双線形形式とするとき, 線形写像 $T \colon V \to V$ で $\Phi(\cdot, \cdot) = \langle T(\cdot), \cdot \rangle$ をみたすものが唯一つ存在し, Φ が対称であれば T もそうである. (この事実は講義では使わないので, 証明は割愛する.)

命題 2.10. $T \colon V \to V$ を対称な線形写像とすると, V の任意の正規直交基底に関する T の表現行列は実対称行列である. したがって, V のある正規直交基底に関する T の表現行列が対角行列になる. いいかえれば, V の正規直交基底として, T の固有ベクトルからなるものがとれる.

証明. $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を V の正規直交基底とするとき, この基底に関する T の表現行列 $A = (a_{ij})$ は $T(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ によって定義される.

$$\langle T(e_j), e_k \rangle = \langle e_j, T(e_k) \rangle,\ \langle T(e_j), e_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i, e_k \rangle = a_{kj},\ \langle e_j, T(e_k) \rangle = \langle e_j, \sum_{i=1}^n a_{ik} e_i \rangle = a_{jk}$$

であるから A は対称である.

実対称行列 A は直交行列によって対角化することができる. すなわち, n 次直交行列 $U = (u_{ij})$ で $U^{-1}AU = {}^tUAU$ が対角行列になるものが存在する. V の新しい正規直交基底 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ を $f_j = \sum_{i=1}^n u_{ij} e_i$ によって定めると, 基底 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ に関する T の表現行列は ${}^tUAU$ となる (各自確かめよ). すなわち対角行列である. $\square$

2.3. 曲面の曲率.

S を向き付け可能な曲面とし, $\mathbb{N}$ を S 上の単位法ベクトル場とする.

定義 2.11. $\mathbf{v} \in T_pS$ に対して, S 上の曲線 $\gamma \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ で, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = \mathbf{v}$ をみたすものをとる (命題 2.5).

(1) S 上の C^∞ 級関数 φ に対して

$$\mathbf{v} \cdot \varphi = D_{\mathbf{v}} \varphi = \frac{d}{dt} \varphi(\gamma(t))|_{t=0}$$

と定義する.

(2) S 上のベクトル場 $\mathbb{Y}$ に対して

$$D_{\mathbf{v}} \mathbb{Y} = \frac{d}{dt} \mathbb{Y}(\gamma(t))|_{t=0} \in T_pS$$

と定義する.

補題 2.12. (1) $\mathbf{v}\cdot\varphi$, $D_{\mathbf{v}}\mathbb{Y}$ は well-defined である.

(2) $\mathbf{v}\cdot\varphi$, $D_{\mathbf{v}}\mathbb{Y}$ は $\mathbf{v}$ について線形である.

(3) $\mathbf{v}\cdot\langle\mathbb{Y},\mathbb{Z}\rangle = \langle D_{\mathbf{v}}\mathbb{Y},\mathbb{Z}\rangle + \langle\mathbb{Y},D_{\mathbf{v}}\mathbb{Z}\rangle$.

(4) $D_{\mathbf{v}}\mathbb{N}\in T_pS$.

証明. (1) $\mathbf{v} = af_u(u,v)+bf_v(u,v)$ とし, $\gamma(t) = f(u(t),v(t))$ と書く (cf. 補題 2.4) と, $\gamma'(0) = f_u(u,v)\cdot u'(0)+f_v(u,v)\cdot v'(0) = \mathbf{v}$ より, $u'(0)=a$, $v'(0)=b$.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbb{Y}(\gamma(t))|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\mathbb{Y}(f(u(t),v(t)))|_{t=0}\\
&= (\mathbb{Y}\circ f)_u(u(0),v(0))\cdot u'(0) + (\mathbb{Y}\circ f)_v(u(0),v(0))\cdot v'(0)\\
&= a(\mathbb{Y}\circ f)_u(f^{-1}(p)) + b(\mathbb{Y}\circ f)_v(f^{-1}(p))
\end{aligned}
$$

より $D_{\mathbf{v}}\mathbb{Y}$ は well-defined.

(2) $\mathbf{v} = af_u(u,v)+bf_v(u,v), \mathbf{w} = cf_u(u,v)+df_v(u,v)\in T_pM$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ とする. $\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w} = (\lambda a+\mu c)f_u(u,v)+(\lambda b+\mu d)f_v(u,v)$ であるから, (1) の計算により

$$
\begin{aligned}
D_{\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}}\mathbb{Y} &= (\lambda a+\mu c)(\mathbb{Y}\circ f)_u + (\lambda b+\mu d)(\mathbb{Y}\circ f)_v\\
&= \lambda(a(\mathbb{Y}\circ f)_u + b(\mathbb{Y}\circ f)_v) + \mu(c(\mathbb{Y}\circ f)_u + d(\mathbb{Y}\circ f)_v)\\
&= \lambda D_{\mathbf{v}}\mathbb{Y} + \mu D_{\mathbf{w}}\mathbb{Y}.
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}\cdot\langle\mathbb{Y},\mathbb{Z}\rangle &= \frac{d}{dt}\langle\mathbb{Y}(\varphi(\gamma(t))),\mathbb{Z}(\varphi(\gamma(t)))\rangle|_{t=0}\\
&= \left\langle\frac{d}{dt}\mathbb{Y}(\varphi(\gamma(t)))|_{t=0},\mathbb{Z}(p)\right\rangle + \left\langle Y(p),\frac{d}{dt}\mathbb{Z}(\varphi(\gamma(t)))|_{t=0}\right\rangle\\
&= \langle D_{\mathbf{v}}\mathbb{Y},\mathbb{Z}\rangle + \langle\mathbb{Y},D_{\mathbf{v}}\mathbb{Z}\rangle.
\end{aligned}
$$

(4) $\langle\mathbb{N},\mathbb{N}\rangle = 1$ と (3) により, $\langle D_{\mathbf{v}}\mathbb{N},\mathbb{N}\rangle = 0$. したがって, $D_{\mathbf{v}}\mathbb{N}\in T_pS$. □

定義 2.13. $\mathbf{v}\in T_pS$ に対して,

$$\Sigma(\mathbf{v}) = -D_{\mathbf{v}}\mathbb{N}$$

と定めると, 手前の補題により, $\Sigma(\mathbf{v})\in T_pS$ であり, $\Sigma\colon T_pS\to T_pS$ は線形写像である. Σ のことを**形作要素** (shape operator) とよぶ.

定義 2.14. T_pS 上の二つの対称双線形形式 $I\colon T_pS\times T_pS\to\mathbb{R}$, $II\colon T_pS\times T_pS\to\mathbb{R}$ を

$$I(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \langle\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle,\ II(\mathbf{v},\mathbf{w}) = I(\Sigma(\mathbf{v}),\mathbf{w})\quad(\mathbf{v},\mathbf{w}\in T_pS)$$

によって定義し, それぞれ S の**第 1 基本形式** (1st fundamental form), **第 2 基本形式** (2nd fundamental form) とよぶ.

$$g_{ij}(u_1,u_2) = I(f_{u_i}(u_1,u_2),f_{u_j}(u_1,u_2)),\ h_{ij}(u_1,u_2) = II(f_{u_i}(u_1,u_2),f_{u_j}(u_1,u_2))$$

とおく.

注. (1) 以後, パラメータ (u,v) をしばしば (u_1,u_2) と書く.

(2) II の対称性は次の命題 2.15 で確認する.

命題 2.15. (1) $h_{ij}=\langle \mathbb{N}(f(u_1,u_2)), f_{u_iu_j}(u_1,u_2)\rangle$ が成り立つ. とくに $h_{ij}=h_{ji}$ である.
(2) II は対称である. すなわち,

$$II(\mathbf{v},\mathbf{w})=II(\mathbf{w},\mathbf{v})\quad(\mathbf{v},\mathbf{w}\in T_pS)$$

が成り立つ. したがって, Σ は対称な線形写像である.

証明. (1) $\gamma(t)=f(u_1+t,u_2)$ とおくと, $\gamma(0)=f(u_1,u_2)$, $\gamma'(0)=f_{u_1}(u_1,u_2)$ であるから,

$$\Sigma(f_{u_1}(u_1,u_2))=-D_{f_{u_1}(u_1,u_2)}\mathbb{N}=-\frac{d}{dt}\mathbb{N}(f(u_1+t,u_2))|_{t=0}=-\frac{\partial}{\partial u_1}\mathbb{N}(f(u_1,u_2))$$

となり, 同様に $\Sigma(f_{u_2}(u_1,u_2))=-\dfrac{\partial}{\partial u_2}\mathbb{N}(f(u_1,u_2))$ が成立する. したがって,

$$\begin{aligned}
h_{ij} &= -\left\langle \frac{\partial}{\partial u_i}\mathbb{N}(f(u_1,u_2)), f_{u_j}(u_1,u_2)\right\rangle\\
&= -\frac{\partial}{\partial u_i}\langle \mathbb{N}(f(u_1,u_2)), f_{u_j}(u_1,u_2)\rangle+\langle \mathbb{N}(u_1,u_2), f_{u_iu_j}(u_1,u_2)\rangle\\
&= \langle \mathbb{N}(u_1,u_2), f_{u_iu_j}(u_1,u_2)\rangle.
\end{aligned}$$

(2) $\mathbf{v}=af_{u_i}+bf_{u_j}$, $\mathbf{w}=cf_{u_i}+df_{u_j}$ と表せて, (1) により

$$\begin{aligned}
II(\mathbf{v},\mathbf{w}) &= acII(f_{u_i},f_{u_i})+adII(f_{u_i},f_{u_j})+bcII(f_{u_j},f_{u_i})+bdII(f_{u_j},f_{u_j})\\
&= ach_{ii}+adh_{ij}+bch_{ji}+bdh_{jj}=ach_{ii}+(ad+bc)h_{ij}+bdh_{jj}\\
&= \cdots=II(\mathbf{w},\mathbf{v})
\end{aligned}$$

となる. □

定義 2.16. 曲面 S の形作要素 $\Sigma\colon T_pS\to T_pS$ の行列式 $\det\Sigma$, トレース $\mathrm{tr}\Sigma$ の 1/2 倍のことを, それぞれ p における S の**ガウス曲率**, **平均曲率**とよび, K, H で表す.

注. (1) 一般に, 線形変換 $T\colon V\to V$ (V は有限次元実ベクトル空間) に対して, その行列式 $\det T$, トレース $\mathrm{tr}T$ が, 表現行列の行列式, トレースとして定義される.

(2) 形作用素 $\Sigma\colon T_pS\to T_pS$ の固有値 κ_1, κ_2 のことを p における S の**主曲率**という. $K=\kappa_1\kappa_2$, $H=\dfrac{1}{2}(\kappa_1+\kappa_2)$ が成り立つ.

命題 2.17. 曲面 S のガウス曲率 K, 平均曲率 H は

$$K=\frac{h_{11}h_{22}-h_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2},\quad H=\frac{g_{22}h_{11}-2g_{12}h_{12}+g_{11}h_{22}}{2(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)}$$

によって与えられる.

$\Sigma(f_{u_j}(u_1,u_2)) \in T_pS$ $(p=f(u_1,u_2))$ なので,

$$(\star) \qquad \Sigma(f_{u_j}(u_1,u_2)) = \sum_{i=1}^{2} \sigma_{ij}(u_1,u_2) f_{u_i}(u_1,u_2) \quad (j=1,2)$$

と書ける.

$$\widehat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(u_1,u_2) & \sigma_{12}(u_1,u_2) \\ \sigma_{21}(u_1,u_2) & \sigma_{22}(u_1,u_2) \end{pmatrix}$$

とおくと, これは T_pS の基底 $\{f_{u_1}(u_1,u_2), f_{u_2}(u_1,u_2)\}$ に関する Σ の表現行列である.

σ_{ij} は少し計算しづらいので, これらを g_{ij}, h_{ij} を用いて表示する.

補題 2.18. $\widehat{I} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$, $\widehat{II} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$ とおくと, 次が成り立つ.

(1) $\widehat{I}$ は正則行列である.

(2) $\widehat{\Sigma} = \widehat{I}^{-1}\widehat{II}$ が成り立つ.

証明. (1)

$$\begin{aligned} 0 \neq A^2 &= (||f_{u_1}||||f_{u_2}||\sin\theta)^2 = ||f_{u_1}||^2||f_{u_2}||^2(1-\cos^2\theta) \\ &= ||f_{u_1}||^2||f_{u_2}||^2 - (||f_{u_1}||||f_{u_2}||\cos\theta)^2 = ||f_{u_1}||^2||f_{u_2}||^2 - \langle f_{u_1}, f_{u_2}\rangle^2 \\ &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \det\widehat{I} \end{aligned}$$

であるから, $\det\widehat{I} \neq 0$. すなわち, $\widehat{I}$ は正則行列である.

(2) $(\star)$ の両辺と $f_{u_k}(u_1,u_2)$ との内積をとると

$$\langle \Sigma(f_{u_j}), f_{u_k}\rangle = \sum_{i=1}^{2} \sigma_{ij}\langle f_{u_i}, f_{u_k}\rangle = \sum_{i=1}^{2}\sigma_{ij}g_{ik}.$$

左辺を h_{jk} とおいたので,

$$h_{jk} = \sum_{i=1}^{2}\sigma_{ij}g_{ik} \iff h_{kj} = \sum_{i=1}^{2} g_{ki}\sigma_{ij} \quad \text{すなわち } \widehat{II} = \widehat{I}\widehat{\Sigma}. \qquad \square$$

注. $g_{11}, g_{12}=g_{21}, g_{22}$ をそれぞれ E, F, G で表すこともある. $h_{11}, h_{12}=h_{21}, h_{22}$ をそれぞれ L, M, N で表すこともある.

命題 2.17 の証明.

$$\widehat{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, \qquad \widehat{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$K = \det\widehat{\Sigma} = (\det\widehat{I})^{-1}\det\widehat{II} = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

$$\widehat{\Sigma} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} GL-FM & GM-FN \\ -FL+EM & -FM+EN \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\widehat{\Sigma} = \frac{GL-2FM+EN}{2(EG-F^2)} \qquad \square$$

2.4. **ガウス曲率・平均曲率の意味.**

S を $\mathbb{R}^3$ の合同変換によって移動して, 点 p が原点に, T_pS が xy 平面に, $\mathbb{N}(p)$ が $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ にそれぞれ一致するようにする.

S の点 p に十分近い部分は, xy 平面の原点の近傍 U で定義された関数 $z = \varphi(x,y)$ のグラフとして表せる.
このとき, まず, $\varphi(0,0) = 0$
また, $\mathbb{N}(\varphi(x,y)) = \frac{(-\varphi_x, -\varphi_y, 1)}{\sqrt{\varphi_x^2+\varphi_y^2+1}}$ と計算されるが, 一方, $\mathbb{N}(p) = (0,0,1)$ であるから, $\varphi_x(0,0) = \varphi_y(0,0) = 0$
すなわち, $(0,0)$ は関数 φ の臨界点である.
演習問題 $\boxed{24}$ (1) により, p におけるガウス曲率は
$K(p) = \varphi_{xx}(0,0)\varphi_{yy}(0,0) - \varphi_{xy}(0,0)^2$
となる.
右辺は関数 φ の $(0,0)$ におけるヘッセ行列の行列式である.

$$\begin{aligned} K(p) > 0 \quad &\Rightarrow \quad (\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)(0,0) > 0 \\ &\Rightarrow \quad \begin{cases} \varphi_{xx}(0,0) > 0 \text{ ならば } \varphi \text{ は } (0,0) \text{ で極小} \\ \varphi_{xx}(0,0) < 0 \text{ ならば } \varphi \text{ は } (0,0) \text{ で極大} \end{cases} \\ K(p) < 0 \quad &\Rightarrow \quad (\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2)(0,0) < 0 \\ &\Rightarrow \quad (0,0) \text{ は } \varphi \text{ の鞍点 (峠点)} \end{aligned}$$

まず, 曲面の面積を定義する. 簡単のために, 曲面 S は写像 $f\colon D \to S$ によってパラメータ付けられているとする.

$f(u_1 + \Delta u_1, u_2) - f(u_1, u_2) \approx f_{u_1}(u_1, u_2)\Delta u_1$
$f(u_1, u_2 + \Delta u_2) - f(u_1, u_2) \approx f_{u_2}(u_1, u_2)\Delta u_2$
黒い曲面片の面積 $\approx$ 赤い平行四辺形の面積 $= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\,\Delta u_1 \Delta u_2$
そこで次のように定義する:

定義 2.19. 写像 $f\colon D \to S$ によってパラメータ付けられた曲面 S の**面積** $A(S)$ を

$$A(S) = \int_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du_1 du_2$$

によって定義する. $dA = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du_1 du_2$ とおき, S の**面積要素**とよぶ.

注. $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = ||f_{u_1} \times f_{u_2}||$

例. (1) $S = \{(x, y, \varphi(x,y))\}$ $z = \varphi(x,y)$ のグラフ
$f(x,y) = (x, y, \varphi(x,y))$
$f_x = (1, 0, \varphi_x)$, $f_y = (0, 1, \varphi_y)$, $f_x \times f_y = (-\varphi_x, -\varphi_y, 1)$, $||f_x \times f_y|| = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + 1}$

$\varphi(x,y)=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$ のとき

$\varphi_x=\dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$, $\varphi_y=\dfrac{-y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$, $||f_x\times f_y||=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$

開半球面の面積 $=\displaystyle\int_{x^2+y^2<r^2}\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\,dxdy=\cdots=2\pi r^2$

(2) $f(\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$

$f_\theta=(r\cos\theta\cos\varphi,r\cos\theta\sin\varphi,-r\sin\theta)$

$f_\varphi=(-r\sin\theta\sin\varphi,r\sin\theta\cos\varphi,0)$

$f_\theta\times f_\varphi=(r^2\sin^2\theta\cos\varphi,r^2\sin^2\theta\sin\varphi,r^2\cos\theta\sin\theta)$, $||f_\theta\times f_\varphi||=r^2\sin\theta$

球面の面積 $=\displaystyle\int_{0<\theta<\pi,0<\varphi<2\pi}r^2\sin\theta=4\pi r^2$

平均曲率は, 曲面を微小変形したときの面積の変化率と密接に関連している.

曲面 S は上のとおりとし, $\mathbb{N}$ を S の単位法ベクトル場とする: $\mathbb{N}=\dfrac{f_{u_1}\times f_{u_2}}{||f_{u_1}\times f_{u_2}||}$

D' を D 内の小領域とし, 0 に近い実数 t に対して, $f_t\colon D'\to\mathbb{R}^3$ を

$f_t(u_1,u_2)=f(u_1,u_2)+t\mathbb{N}(f(u_1,u_2))\quad((u_1,u_2)\in D')$

によって定める. $S'=f(D')$, $S'_t=f_t(D')$ とおくと, S'_t は $f_t\colon D'\to S'_t$ をパラメータ付けとする曲面である. S'_t の第 1 基本量を $(g_t)_{ij}$ $(i,j=1,2)$ で表す: $(g_t)_{ij}=\langle(f_t)_{u_i},(f_t)_{u_j}\rangle$

$$A(S_t)=\int_{D'}\sqrt{(g_t)_{11}(g_t)_{22}-(g_t)_{12}}\,du_1du_2$$

補題 2.20.

$$\frac{d}{dt}A(S_t)|_{t=0}=-2\int_{D'}H(f(u_1,u_2))\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}\,du_1du_2=-2\int_{S'}H\,dA.$$

補題 2.20 により, 以下のことがいえる:

D' において $H>0\quad\Rightarrow\quad A(S'_t)$ は t について単調減少

D' において $H<0\quad\Rightarrow\quad A(S'_t)$ は t について単調増加

D' において $H=0\quad\Rightarrow\quad A(S'_t)$ はほぼ一定

補題 2.20 の証明.

$(f_t)_{u_i}=f_{u_i}+t(\mathbb{N}\circ f)_{u_i}$

$$\begin{aligned}(g_t)_{ij}&=\langle(f_t)_{u_i},(f_t)_{u_j}\rangle\\&=\langle f_{u_i}+t(\mathbb{N}\circ f)_{u_i},f_{u_j}+t(\mathbb{N}\circ f)_{u_j}\rangle\\&=\langle f_{u_i},f_{u_j}\rangle+t\langle f_{u_i},(\mathbb{N}\circ f)_{u_j}\rangle+t\langle(\mathbb{N}\circ f)_{u_i},f_{u_j}\rangle+t^2\langle(\mathbb{N}\circ f)_{u_i},(\mathbb{N}\circ f)_{u_j}\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad\frac{\partial}{\partial t}(g_t)_{ij}|_{t=0}&=\langle f_{u_i},(\mathbb{N}\circ f)_{u_j}\rangle+\langle(\mathbb{N}\circ f)_{u_i},f_{u_j}\rangle\\&=-I(f_{u_i},\Sigma(f_{u_j}))-I(\Sigma(f_{u_i}),f_{u_j})\\&=-II(f_{u_j},f_{u_i})-II(f_{u_i},f_{u_j})\\&=-2h_{ij}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}((g_t)_{11}(g_t)_{22} - {(g_t)_{12}}^2)|_{t=0} &= -2h_{11}g_{22} + g_{11}(-2h_{22}) - 2g_{12}(-2h_{12}) \\
&= -2(h_{11}g_{22} + g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{(g_t)_{11}(g_t)_{22} - {(g_t)_{12}}^2}|_{t=0} &= \frac{1}{2}(g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2)^{-1/2}(-2)(h_{11}g_{22} + g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12}) \\
&= -\frac{g_{22}h_{11} + g_{11}h_{22} - 2g_{12}h_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2}} = -2H\sqrt{g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \frac{d}{dt}\int_{D'}\sqrt{(g_t)_{11}(g_t)_{22} - {(g_t)_{12}}^2}\, du_1 du_2|_{t=0} &= \int_{D'}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{(g_t)_{11}(g_t)_{22} - {(g_t)_{12}}^2}|_{t=0}\, du_1 du_2 \\
&= -2\int_{D'} H\sqrt{g_{11}g_{22} - {g_{12}}^2}\, du_1 du_2
\end{aligned}$$

□

石鹸膜 S は, その境界を張る曲面の中で面積が極小であり, とくに, S の境界を変えない微小変形 S_t に対して, $\frac{d}{dt}A(S_t)|_{t=0} = 0$ が成り立つ. そして, このことから石鹸膜の平均曲率は恒等的に零であることが分かる. 平均曲率が零の曲面は**極小曲面**とよばれる.

2.5. **ガウスの驚きの定理.**

まず, 曲面 S 上の曲線の長さから, 第 1 基本量が復元できることをみる.

$\gamma\colon [a,b] \to S$ を S 上の曲線とし, その像 $C = \gamma([a,b])$ を含む開集合 U が写像 $f\colon D \to U$ によって局所パラメータ付けられているとする.
このとき, D 内の曲線 $\gamma_0\colon [a,b] \to D$ で $\gamma = f \circ \gamma_0$ となるものが存在する (cf. 補題 2.4).

$\gamma_0(t) = (u_1(t), u_2(t))$ とすると $\gamma(t) = f(u_1(t), u_2(t))$
$L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||\, dt$
$\gamma'(t) = f_{u_1}(u_1(t), u_2(t)){u_1}'(t) + f_{u_2}(u_1(t), u_2(t)){u_2}'(t)$
$||\gamma'||^2 = \langle f_{u_1}{u_1}' + f_{u_2}{u_2}', f_{u_1}{u_1}' + f_{u_2}{u_2}' \rangle = g_{11}{u_1'}^2 + 2g_{12}{u_1}'{u_2}' + g_{22}{u_2'}^2$
よって, 次の補題が示された.

補題 2.21.

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_a^b \Big(g_{11}(u_1(t), u_2(t)){u_1}'(t)^2 + 2g_{12}(u_1(t), u_2(t)){u_1}'(t){u_2}'(t) \\
&\qquad + g_{22}(u_1(t), u_2(t)){u_2}'(t)^2\Big)^{1/2}\, dt
\end{aligned}$$

補題の公式から分かること: S 上の曲線の長さから, 第 1 基本量を復元することができる.

説明. $(u_0, v_0) \in D$ を固定し, 任意の実数 a, b に対して D 内の曲線
$\gamma_0\colon [0,T] \to D;\ t \mapsto (u_0 + at, v_0 + bt)$ を考え, $\gamma = f \circ \gamma_0$ とおく. 補題の公式により
$L(\gamma) = \int_0^T (g_{11}(u_0 + at, v_0 + bt)a^2 + \cdots)^{1/2}\, dt$

$\dfrac{d}{dT}L(\gamma)|_{T=0} = g_{11}(u_0,v_0)a^2 + 2g_{12}(u_0,v_0)ab + g_{22}(u_0,v_0)b^2)^{1/2}$
例えば $a=1$, $b=0$ とすれば, 右辺 $= g_{11}(u_0,v_0)^{1/2}$.

S 上の 2 次元人は, 測量によって, S 上の曲線の長さをいくらでも正確に求めることができる. したがって, 彼らは第 1 基本量を原理的に求めることができる.

定理 2.22 (ガウスの驚きの定理)**.** 曲面 S のガウス曲率 K は第 1 基本量のみによって決まる.

定理の驚くべき点
(i) K がその定義においてより重要にみえる第 2 基本量に依存していない.
(ii) K が曲面 S 上の 2 次元人にも認識され得る. (第 1 基本量を原理的に求めることができるから.)
言い換えれば, K は, S を器の空間 $\mathbb{R}^3$ から切り離しても (つまり, 補空間 $\mathbb{R}^3 \setminus S$ を忘れても) 意味を持つ. $\Rightarrow$ リーマン幾何学, 一般相対性理論
このような性質・量は**内在的**であるといい, そうでないとき**外在的**であるという. 平均曲率は外在的である.

定理 2.22 の証明.

定義 2.23. S 上の接ベクトル場 $\mathbb{X}$ と $\mathbf{v} \in T_pS$ に対して

$$\nabla_{\mathbf{v}}\mathbb{X} = \Pi(D_{\mathbf{v}}\mathbb{X}) = D_{\mathbf{v}}\mathbb{X} - \langle D_{\mathbf{v}}\mathbb{X}, \mathbb{N}(p)\rangle \mathbb{N}(p) \in T_pS$$

と定義する. ここで, $\Pi\colon T_p\mathbb{R}^3 \to T_pS$ は直交射影である. $\nabla_{\mathbf{v}}\mathbb{X}$ のことを $\mathbb{X}$ の $\mathbf{v}$ 方向への**接共変微分**とよぶ.

補題 2.24. $\mathbb{Y}$ を S 上のベクトル場, $\mathbb{X}$ を S 上の接ベクトル場, φ を S 上の C^∞ 級関数, $\mathbf{v} \in T_pS$ とする. このとき以下の等式が成り立つ:

(i) $D_{\mathbf{v}}(\varphi\mathbb{Y}) = (\mathbf{v}\cdot\varphi)\mathbb{Y}(p) + f(p)D_{\mathbf{v}}\mathbb{Y}$.
(ii) $\nabla_{\mathbf{v}}(\varphi\mathbb{X}) = (\mathbf{v}\cdot\varphi)\mathbb{X}(p) + f(p)\nabla_{\mathbf{v}}\mathbb{X}$.

証明. 定義に基づいて計算すればよい. □

以下, S の局所パラメータ付け $f\colon D \to U$ をとり, U において考える. また, S 上のベクトル場 $\mathbb{Y}$ と f との合成 $\mathbb{Y}\circ f$ を記法の簡潔のために $\mathbb{Y}$ で表す. (あるいは, $U = D$ と同一視することにより, $\mathbb{Y}|_U$ の定義域を D とみなすといってもよい.)

補題 2.25. $\nabla_{f_{u_i}} f_{u_j} = af_{u_1} + bf_{u_2}$ と書くと, a, b は第 1 基本量 E, F, G とそれらの偏導関数だけで表せる.

証明. 例として, $i=j=1$ の場合を考える. $\nabla_{f_{u_1}} f_{u_1} = af_{u_1} + bf_{u_2}$ と書き, 両辺と f_{u_1}, f_{u_2} との内積を取ると,

$$aE + bF = \langle f_{u_1u_1}, f_{u_1}\rangle = \frac{1}{2}\langle f_{u_1}, f_{u_1}\rangle_{u_1} = \frac{1}{2}E_{u_1},$$

$$\begin{aligned} aF+bG &= \langle f_{u_1u_1}, f_{u_2}\rangle = \langle f_{u_1}, f_{u_2}\rangle_{u_1} - \langle f_{u_1}, f_{u_2u_1}\rangle \\ &= \langle f_{u_1}, f_{u_2}\rangle_{u_1} - \frac{1}{2}\langle f_{u_1}, f_{u_1}\rangle_{u_2} = F_{u_1} - \frac{1}{2}E_{u_2}. \end{aligned}$$

これらを a, b について解けばよい. □

命題 2.26 (ガウスの方程式)**.**

$$\text{(1)} \qquad \nabla_{f_{u_1}}(\nabla_{f_{u_2}}\mathbb{X}) - \nabla_{f_{u_2}}(\nabla_{f_{u_1}}\mathbb{X}) = I(\mathbb{X}, \Sigma(f_{u_2}))\Sigma(f_{u_1}) - I(\mathbb{X}, \Sigma(f_{u_1}))\Sigma(f_{u_2}).$$

証明.

$$\nabla_{f_{u_i}}\mathbb{X} = \mathbb{X}_{u_i} - \langle \mathbb{X}_{u_i}, \mathbb{N}\rangle\mathbb{N} = \mathbb{X}_{u_i} + \langle \mathbb{X}, \mathbb{N}_{u_i}\rangle\mathbb{N}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \nabla_{f_{u_1}}(\nabla_{f_{u_2}}\mathbb{X}) &= (\nabla_{f_{u_2}}\mathbb{X})_{u_1} + \langle \nabla_{f_{u_2}}\mathbb{X}, \mathbb{N}_{u_1}\rangle\mathbb{N} \\ &= [\mathbb{X}_{u_2} - \langle \mathbb{X}_{u_2}, \mathbb{N}\rangle\mathbb{N}]_{u_1} + \langle [\mathbb{X}_{u_2} - \langle \mathbb{X}_{u_2}, \mathbb{N}\rangle\mathbb{N}], \mathbb{N}_{u_1}\rangle\mathbb{N} \\ &= \mathbb{X}_{u_2u_1} - \langle \mathbb{X}_{u_2u_1}, \mathbb{N}\rangle\mathbb{N} - \langle \mathbb{X}_{u_2}, \mathbb{N}_{u_1}\rangle\mathbb{N} - \langle \mathbb{X}_{u_2}, \mathbb{N}\rangle\mathbb{N}_{u_1} + \langle \mathbb{X}_{u_2}, \mathbb{N}_{u_1}\rangle\mathbb{N} \\ &= \mathbb{X}_{u_2u_1} - \langle \mathbb{X}_{u_2u_1}, \mathbb{N}\rangle\mathbb{N} + \langle \mathbb{X}, \mathbb{N}_{u_2}\rangle\mathbb{N}_{u_1}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\nabla_{f_{u_1}}(\nabla_{f_{u_2}}\mathbb{X}) - \nabla_{f_{u_2}}(\nabla_{f_{u_1}}\mathbb{X}) = I(\mathbb{X}, \Sigma(f_{u_2}))\Sigma(f_{u_1}) - I(\mathbb{X}, \Sigma(f_{u_1}))\Sigma(f_{u_2}).$$

□

$\mathbb{X} = f_{u_1}$ とし, (1) の両辺と f_{u_2} との内積をとると

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &I(\nabla_{f_{u_1}}(\nabla_{f_{u_2}}f_{u_1}) - \nabla_{f_{u_2}}(\nabla_{f_{u_1}}f_{u_1}), f_{u_2}) \\ &= I(f_{u_1}, \Sigma(f_{u_2}))I(\Sigma(f_{u_1}), f_{u_2}) - I(f_{u_1}, \Sigma(f_{u_1}))I(\Sigma(f_{u_2}), f_{u_2}) \\ &= II(f_{u_1}, f_{u_2})I(f_{u_1}, f_{u_2}) - II(f_{u_1}, f_{u_1})II(f_{u_2}, f_{u_2}) \\ &= h_{12}^2 - h_{11}h_{22}. \end{aligned}$$

あとは最左辺が内在的であることを示せばよい.

命題 2.27. (2) の最左辺は, 第 1 基本量 E, F, G とそれらの 2 階までの偏導関数だけで表せる.

証明. $\nabla_{f_{u_2}}f_{u_1} = af_{u_1} + bf_{u_2}$ と書くと, 補題 2.25 により, a, b は第 1 基本量 E, F, G とそれらの偏導関数だけで表せる.

$$\begin{aligned} \nabla_{f_{u_1}}(\nabla_{f_{u_2}}f_{u_1}) &= \nabla_{f_{u_1}}(af_{u_1} + bf_{u_2}) \\ &= (a \circ f)_{u_1}f_{u_1} + a\nabla_{f_{u_1}}f_{u_1} + (b \circ f)_{u_1}f_{u_2} + b\nabla_{f_{u_1}}f_{u_2}. \end{aligned}$$

再び補題 2.25 を使うことにより結論が従う. □

3. ガウス・ボンネの定理

3.1. **準備 (曲線の測地曲率, グリーンの公式).**

S を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面とし, $f\colon D \to U$ を S の局所パラメータ付けとする. $\gamma\colon [a,b] \to S$ を S 上の曲線で像が U に含まれるものとし, γ のパラメータ s は弧長パラメータであるとする. このとき, D 内の曲線 $\gamma_0\colon [a,b] \to D$ で $\gamma = f \circ \gamma_0$ となるものが存在する (cf. 補題 2.4).

注. 一般には, s は γ_0 の弧長パラメータではない.

定義 3.1. $\mathbf{t}(s) = \gamma'(s)$, $\mathbf{n}(s) = \mathbb{N}(\gamma(s))$, $\mathbf{n}_g(s) = \mathbf{n}(s) \times \mathbf{t}(s)$ とおく. ($\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_g(s), \mathbf{n}(s)\}$ は $T_{\gamma(s)}\mathbb{R}^3$ の正規直交基底である.) このとき, $\mathbf{t}'(s)$ は $\mathbf{n}_g(s)$ と $\mathbf{n}(s)$ の一次結合として表されるが, $\mathbf{n}_g(s)$ の係数を $\kappa_g(s)$ とおいて γ の $\gamma(s)$ における**測地曲率** (geodesic curvature) とよぶ: $\kappa_g = \langle \mathbf{t}'(s), \mathbf{n}_g(s)\rangle = \langle \gamma''(s), \mathbf{n}_g(s)\rangle$.

注. $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}_g(s)\}$ は $T_{\gamma(s)}S$ の正規直交基底であり, $\mathbf{n}_g(s)$ は $T_{\gamma(s)}S$ において $\mathbf{t}(s)$ を「反時計回り」に $90°$ 回転したものに他ならない.

定義 3.2. 曲線 γ の**全測地曲率** (total geodesic curvature) は,

$$\int_\gamma \kappa_g \, ds = \int_a^b \kappa_g(s)\, ds$$

として定義される.

命題 3.3 (グリーンの定理)**.** $\gamma_0\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 上の単純閉曲線とし, 領域 R_0 を囲むとする. また, P, Q を ($R_0 \cup \gamma_0$ を含む領域上の) C^∞ 級関数とする. このとき,

$$\int_{\gamma_0} (Pu' + Qv')\, dt \left(= \int_a^b (P(u(t), v(t))u'(t) + Q(u(t), v(t))v'(t))\, dt \right) = \int_{R_0} (Q_u - P_v)\, dudv$$

(グリーンの公式) が成り立つ.

3.2. **ガウス・ボンネの定理 (局所版).**

定理 3.4. γ を U に含まれる単純閉曲線とし, 領域 R を囲むとする. このとき,

$$\int_R K\, dA = 2\pi - \int_\gamma \kappa_g\, ds$$

が成り立つ.

証明. U 上の長さ 1 の接ベクトル場 $\mathbf{e}_1$ をとる (例えば $\mathbf{e}_1 = f_u/\sqrt{E}$). $\mathbf{e}_2 = \mathbb{N} \times \mathbf{e}_1$ とおくと, U の各点 p に対して, $\{\mathbf{e}_1(p), \mathbf{e}_2(p)\}$ は T_pS の正規直交基底である. $\mathbf{e}_1$ の長さが 1 なので, $\nabla_{f_u}\mathbf{e}_1$ は $\mathbf{e}_1$ に直交する接ベクトルであり,[1] したがって

$$\nabla_{f_u}\mathbf{e}_1 = P\mathbf{e}_2, \quad \nabla_{f_v}\mathbf{e}_1 = Q\mathbf{e}_2$$

[1] 補題 2.12 (3) により,

$$0 = \mathbf{v} \cdot \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle = 2\langle D_{\mathbf{v}}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle = 2\langle \nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1\rangle.$$

をみたす関数 P, Q が存在する．このとき, グリーンの公式の左辺は

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_0}(Pu'+Qv')\,ds &= \int_{\gamma_0}(u'\langle\nabla_{f_u}\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle+v'\langle\nabla_{f_v}\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle)\,ds\\ &= \int_{\gamma_0}\langle u'\nabla_{f_u}\mathbf{e}_1+v'\nabla_{f_v}\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle\,ds\\ &= \int_{\gamma_0}\langle\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2\rangle\,ds\\ &= \int_{\gamma_0}(\kappa_g-\theta')\,ds\\ &= \int_{\gamma_0}\kappa_g\,ds-2\pi\end{aligned}$$

となる．ここで, $\mathbf{e}_1'=D_{\gamma'}\mathbf{e}_1$, $\gamma'=f_uu'+f_vv'$ に注意．また, 最後から 2 番目の等号で次の補題を使った.[2]

補題.

$$\kappa_g=\langle\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2\rangle+\theta'$$

(補題の証明)　$\mathbf{t}=\gamma'$ とし, $\mathbf{t}=\cos\theta\mathbf{e}_1+\sin\theta\mathbf{e}_2$ と書く．すると

$$\mathbf{t}'=-\sin\theta\theta'\mathbf{e}_1+\cos\theta\mathbf{e}_1'+\cos\theta\theta'\mathbf{e}_2+\sin\theta\mathbf{e}_2',\langle\mathbf{t}',\mathbf{e}_2\rangle=\cos\theta\langle\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2\rangle+\cos\theta\theta'$$

となる．一方, 測地曲率の定義により

$$\langle\mathbf{t}',\mathbf{e}_2\rangle=\langle\kappa_g\mathbf{n}_g,\mathbf{e}_2\rangle=\kappa_g\langle\mathbf{n}\times\mathbf{t},\mathbf{e}_2\rangle=\kappa_g\langle\cos\theta\mathbf{e}_2-\sin\theta\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle=\kappa_g\cos\theta$$

であるから, 直前の式と合わせて補題の等式を得る.[3] □

グリーンの公式の右辺を計算するために,

$$\nabla_{f_v}(\nabla_{f_u}\mathbf{e}_1)=\nabla_{f_v}(P\mathbf{e}_2)=P_v\mathbf{e}_2+P\nabla_{f_v}\mathbf{e}_2=P_v\mathbf{e}_2+P(-Q\mathbf{e}_1)$$

に注意する.[4] u, v の役割を入れ替えて得られる式を書き, 辺々引くと

$$\nabla_{f_v}(\nabla_{f_u}\mathbf{e}_1)-\nabla_{f_u}(\nabla_{f_v}\mathbf{e}_1)=(P_v-Q_u)\mathbf{e}_2$$

を得る．一方, ガウスの方程式 (命題 2.26) により

$$\nabla_{f_u}(\nabla_{f_v}\mathbf{e}_1)-\nabla_{f_v}(\nabla_{f_u}\mathbf{e}_1)=I(\mathbf{e}_1,\Sigma(f_v))\Sigma(f_u)-I(\mathbf{e}_1,\Sigma(f_u))\Sigma(f_v)$$

である．右辺はベクトル 3 重積の公式

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle\mathbf{b}-\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle\mathbf{a}$$

---

[2] $\int_{\gamma_0}\theta'\,ds=2\pi$ は γ_0 が単純閉曲線であることによる．詳細は講義中に説明する．

[3] $\cos\theta=0$ のときは若干注意が必要である．$\widetilde{e}_1=\cos\alpha\mathbf{e}_1+\sin\alpha\mathbf{e}_2$ として証明中の議論を繰り返すと, $\cos(\theta-\alpha)(\langle\widetilde{\mathbf{e}}_1',\widetilde{\mathbf{e}_2}\rangle+\theta'-\kappa_g)=0$ を得る．あとは $\langle\widetilde{\mathbf{e}}_1',\widetilde{\mathbf{e}_2}\rangle=\langle\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2\rangle$ に注意すればよい．

[4] $\nabla_{f_v}\mathbf{e}_1=Q\mathbf{e}_2$ から $\nabla_{f_v}\mathbf{e}_2=-Q\mathbf{e}_1$ が従う．何故なら, 脚注 3 と同様に

$$0=f_v\cdot\langle\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle=\langle\nabla_{f_v}\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\rangle+\langle\mathbf{e}_1,\nabla_{f_v}\mathbf{e}_2\rangle$$

だから．

により $-(\Sigma(f_u)\times\Sigma(f_v))\times\mathbf{e}_1$ に等しく, $\Sigma(f_u)\times\Sigma(f_v)=\lambda\mathbb{N}$ と書けるから, 結局右辺は $-\lambda\mathbb{N}\times\mathbf{e}_1=-\lambda\mathbf{e}_2$ に等しい. λ を計算する.

$$\mathbb{N}=f_u\times f_v/||f_u\times f_v||=f_u\times f_v/\sqrt{g_{11}g_{22}-{g_{12}}^2}$$

であるから,

$$\lambda\sqrt{g_{11}g_{22}-{g_{12}}^2}=\langle\Sigma(f_u)\times\Sigma(f_v),f_u\times f_v\rangle$$

であり, 右辺は「スカラー 4 重積の公式」

$$\langle\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c}\times\mathbf{d}\rangle=\langle\mathbf{a},\mathbf{c}\rangle\langle\mathbf{b},\mathbf{d}\rangle-\langle\mathbf{a},\mathbf{d}\rangle\langle\mathbf{b},\mathbf{c}\rangle$$ [5]

により

$$I(\Sigma(f_u),f_u)I(\Sigma(f_v),f_v)-I(\Sigma(f_u),f_v)I(\Sigma(f_v),f_u)=h_{11}h_{22}-{h_{12}}^2$$

に等しい. したがって,

$$\lambda=(h_{11}h_{22}-{h_{12}}^2)/\sqrt{g_{11}g_{22}-{g_{12}}^2}=K\sqrt{g_{11}g_{22}-{g_{12}}^2}$$

となる. 以上により, 結局

$$Q_u-P_v=-K\sqrt{g_{11}g_{22}-{g_{12}}^2}$$

となり, グリーンの公式の右辺は

$$\int_{R_0}(Q_u-P_v)\,dudv=-\int_{R_0}K\sqrt{g_{11}g_{22}-{g_{12}}^2}\,dudv=-\int_{R_0}K\,dA$$

となる. □

曲線 γ が「曲三角形」($\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$) の場合, θ は三つの頂点の各々において, 外角 δ_i だけジャンプする. したがって, 上の証明における $\displaystyle\int_{\gamma_0}\theta'\,ds=2\pi$ のところは, 次で置き換えられる:

$$\int_{\gamma_0}\theta'\,ds=\sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_{0i}}\theta'\,ds=2\pi-\sum_{i=1}^{3}\delta_i=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i-\pi.$$

ここで, $\alpha_i=\pi-\delta_i$ は内角である. よって, 次の定理を得る.

定理 3.5. U に含まれる曲三角形 γ の内角を α_i とすると,

$$\int_R K\,dA=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i-\pi-\int_\gamma\kappa_g\,ds$$

が成り立つ.

---

[5]

$$\text{左辺}=\det(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\det(\mathbf{c}\times\mathbf{d},\mathbf{a},\mathbf{b})=\langle(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\times\mathbf{a},\mathbf{b}\rangle=\langle\langle\mathbf{c},\mathbf{a}\rangle\mathbf{d}-\langle\mathbf{d},\mathbf{a}\rangle\mathbf{c},\mathbf{b}\rangle=\text{右辺}$$

あるいは

$$\text{右辺}=\langle(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c},\mathbf{d}\rangle=\det(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})=\det(\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\langle\mathbf{c}\times\mathbf{d},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rangle=\text{左辺}$$

例. (1) 平面三角形の場合, $0 = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i - \pi$ となる. すなわち, 内角の和は π である.

(2) 単位球面上の球面三角形 (大円で囲まれる) の場合, $K = 1$, $\kappa_g = 0$ であるから,

$$A(ABC) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

となる.

$\kappa_g = 0$ の説明: $\gamma(s) = (\cos s, \sin s, 0)$ (赤道線) の場合, $\mathbf{t} = \gamma' = (-\sin s, \cos s, 0)$, $\mathbf{t}' = (-\cos s, -\sin s, 0) = -\mathbf{n}$.

前述への補足. 1. グリーンの定理に関する訂正. R_0 の境界のパラメータ付け γ_0 は, R_0 の内部が進行方向の左手になるようにとってあるものとする.

例. $\gamma_0(t) = (\cos t, \sin t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$, $P(u, v) = v$, $Q(u, v) = -u$ とすると,

$$\int_{\gamma_0} P\,du + Q\,dv = \int_0^{2\pi} (\sin t \cdot (\cos t)' - \cos t \cdot (\sin t)')\,dt = -2\pi,$$

(半時計回りにすると 2π になる.)

$$\int_{R_0} (Q_u - P_v)\,dudv = \int_{R_0} (-2)\,dudv = -2\pi.$$

2. $\int_\gamma \theta'\,ds = 2\pi$ に関する補足.

3.3. ガウス・ボンネの定理 (大域版).

定理 3.6. 曲面 S がコンパクトならば, S は「三角形分割」をもつ.

定義 3.7. コンパクトな曲面 S の三角形分割が与えられたとし, v, e, f を頂点, 辺, 面の個数とする. このとき, 整数値 $\chi(S) = v - e + f$ のことを S の**オイラー標数**とよぶ.

注. $\chi(S)$ は S の三角形分割の仕方に依らないことが知られている.

例. (1) $\chi(S^2) = 2$. (四面体で計算.)

(2) $\chi(T^2) = 0$. (18 個の三角形に分けて計算.)

(3) Σ_n $(n \geq 2)$ を n 人乗りの浮き輪とすると, $\chi(\Sigma_n) = 2 - 2n$. (ハンドルを一つ接着するごとにオイラー標数は 2 だけ減少する. 何故なら, 面が二つ減少し, 辺と頂点が三つずつ減少するから.)

定理 3.8. コンパクトで向き付け可能な曲面 S に対して,

$$\int_S K\,dA = 2\pi\chi(S)$$

が成り立つ.

証明. S の三角形分割に現れる面 (中身のつまった曲三角形) を $T^{(1)}, \cdots, T^{(f)}$ とすると,

$$\int_S K\,dA \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{f} \int_{T^{(j)}} K\,dA$$

であり, 右辺の各項に定理 3.4 を適用すると

$$\int_{T^{(j)}} K\,dA = \sum_{i=1}^{3} (\alpha^{(j)})_i - \pi - \int_{\gamma^{(j)}} \kappa_g\,ds$$

となる.

S の三角形分割に現れる辺は, いずれもちょうど二つの面によって共有される. そこで, 二つの面 $T^{(j)}$, $T^{(k)}$ の共有する辺を $c^{(jk)}$ とし, 辺のパラメータ付けを $\gamma_i^{(j)}$, $\gamma_{i'}^{(k)}$ とする. $\gamma_i^{(j)}$ と $\gamma_{i'}^{(k)}$ は互いの向きを逆にする再パラメータ付けであるから, $\displaystyle\int_{\gamma_i^{(j)}} \kappa_g\,ds + \int_{\gamma_{i'}^{(k)}} \kappa_g\,ds = 0$ が成り立ち, すべての面にわたって和をとることにより $\displaystyle\sum_{j=1}^{f} \int_{\gamma^{(j)}} \kappa_g\,ds = 0$ を得る.

v, e, f で三角形分割に現れる頂点, 辺, 面の個数を表す. 以上の議論により,

$$\int_S K\,dA = \sum_{j=1}^{f} \sum_{i=1}^{3} (\alpha^{(j)})_i - \pi f = 2\pi v - \pi f$$

を得る. ここで, 各頂点における内角の和が 2π であることを用いた.

三角形分割の各面は三つの辺をもつが, 一方, 各辺はちょうど二つの面に属するので, $3f = 2e$, $-f = 2f - 2e$ が成り立つ. したがって上式は

$$\int_S K\,dA = 2\pi v + \pi(2f - 2e) = 2\pi(v - e + f) = 2\pi\chi(S)$$

となる. □

系 3.9. コンパクトで向き付け可能な曲面 S のガウス曲率がいたるところ非負であれば, S は球面に同相である. したがって, トーラス, n (≥ 2) 人乗りの浮き輪に同相な曲面は, 必ずガウス曲率が負になる点をもつ.