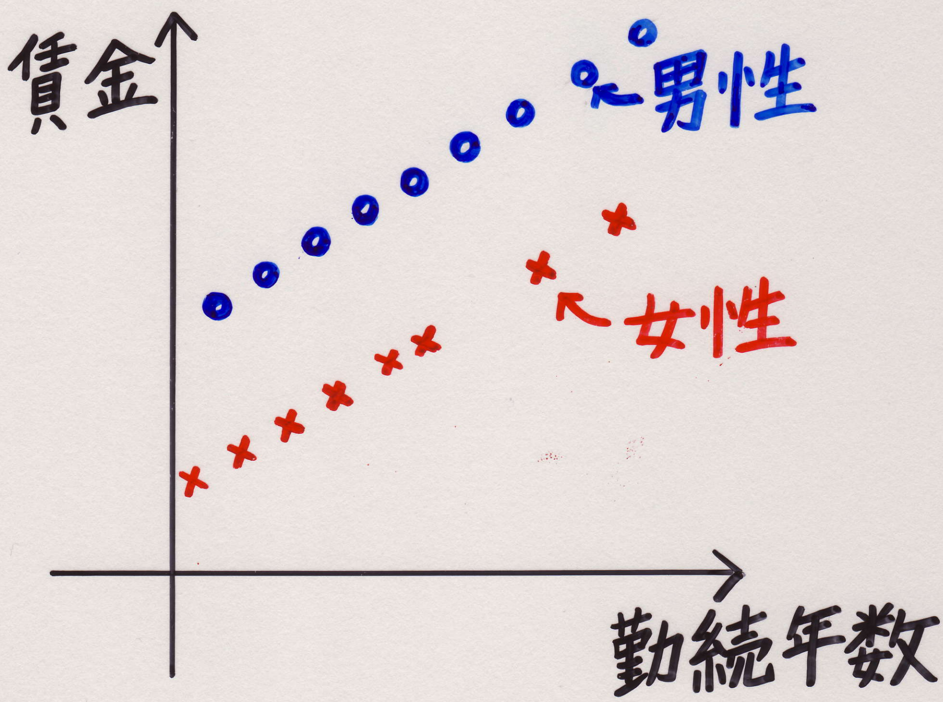
第3回：ダミー変数(1)
(テキスト6章)

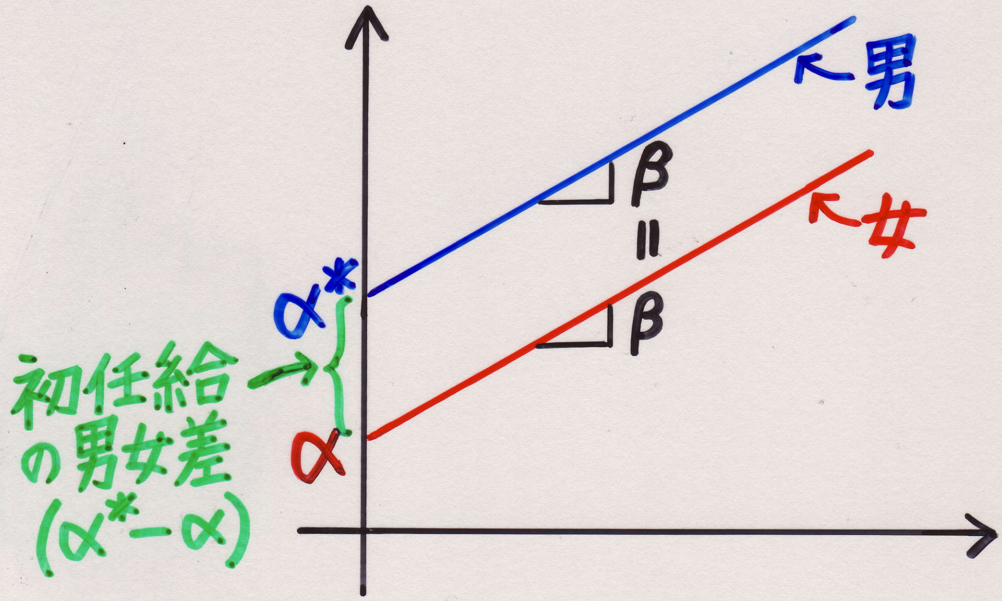
◦例：男女間の賃金格差

データ



⇓

モデル



$$\begin{cases} Y = \alpha^* + \beta X + u : 男 \\ Y = \alpha + \beta X + u : 女 \end{cases} \quad \cdots (ア)$$

つまり

$$\begin{cases} \alpha^*, \alpha : 初任給 & \cdots 異なる \\ \beta : 昇給 & \cdots 共通 \end{cases}$$

$\Downarrow$

α^*, α, β を推定したい。

・(ア) をまとめて 1本の式に：

$$Y=\begin{cases}\{\underbrace{\alpha}_{\text{女子の初任給}}+\underbrace{(\alpha^*-\alpha)}_{\text{で初任給の男女差}}\}+\beta X+u & :\text{男}\\ \{\alpha+\quad\}+\beta X+u & :\text{女}\end{cases}$$

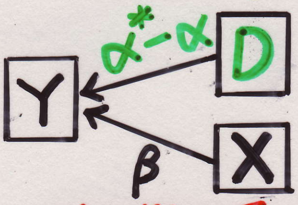
$$=\alpha+(\alpha^*-\alpha)\underline{D}+\beta\underline{X}+u$$

ダミー変数

$$D=\begin{cases}1\ (\text{男})\\0\ (\text{女})\end{cases}$$

⇓

・推定の際は，重回帰



(定数項α)

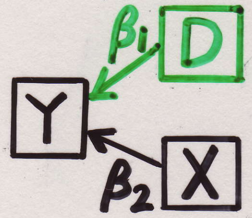
と見る。

⇓

$$\begin{cases}\hat{\alpha}=15\\ \widehat{(\alpha^*-\alpha)}=1\\ \hat{\beta}=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\hat{\alpha}=15\\ \hat{\alpha}^*=15+1=16\\ \hat{\beta}=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\hat{Y}=16+2X:\text{男}\\ \hat{Y}=15+2X:\text{女}\end{cases}$$

$\hat{Y}=15+1\cdot D+2X$

○実際には，重回帰



$$Y = \alpha + \beta_1 \underbrace{D}_{X_1\text{と思う}} + \beta_2 \underbrace{X}_{X_2\text{と思う}} + u$$

として推定値 $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ を求め，

推定された回帰式：

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 D + \hat{\beta}_2 X \qquad \cdots (\text{イ})$$

を得る。

⇓

その上で (イ) を

$$\hat{Y} = \begin{cases} (\hat{\alpha} + \underbrace{\hat{\beta}_1}_{\text{初任給の男女差}}) + \hat{\beta}_2 X : \text{男}\ (D=1) \\ \underbrace{\hat{\alpha}}_{\text{女子の初任給}} \qquad\quad + \underbrace{\hat{\beta}_2}_{\text{昇給}} X : \text{女}\ (D=0) \end{cases}$$

と書き下す。

計算

$$\boxed{Y=\alpha+\beta_1 \underline{D}+\beta_2 \underline{X}+u}$$

	Y	D ($\leftarrow X_1$)	X ($\leftarrow X_2$)	D^2 ($\leftarrow X_1^2$)	DX ($\leftarrow X_1X_2$)	X^2 ($\leftarrow X_2^2$)	YD ($\leftarrow YX_1$)	YX ($\leftarrow YX_2$)
$i=1$	データ	1←男	データ					
2		0←女						
⋮		⋮						
		(作る)						
n								
		$\square$		$\square$	$\square$		$\square$	

$\sum_{i=1}^{n} D_i =$ "1の個数"

$\sum D_i^2 = \sum D_i$

$\left(\uparrow D_i^2 = D_i\right)$

$\sum_{i=1}^{n} D_i X_i =$ "$D_i=1$となるX_iの和"

$$\left(\uparrow\ D_iX_i=\begin{cases} X_i & (D_i=1) \\ 0 & (D_i=0)\end{cases}\right)$$

$D_i=1$となるY_iの和

$$\begin{pmatrix}\hat\beta_1 \\ \hat\beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} S_{Y1} \\ S_{Y2}\end{pmatrix}$$

- $S_{11} = S_{X_1X_1} = S_{DD} = \sum (D_i - \bar D)^2$
  $= \sum D_i^2 - \dfrac{(\sum D_i)^2}{n}$
- $S_{12} = S_{X_1X_2} = S_{DX} = \sum (D_i - \bar D)(X_i - \bar X)$
  $= \sum D_i X_i - \dfrac{(\sum D_i)(\sum X_i)}{n}$ 等

$$\hat\alpha = \bar Y - \hat\beta_1 \bar D - \hat\beta_2 \bar X$$

数値例

男 $X_1 = 15$, $Y_1 = 46.2$

女 $X_2 = 2$, $Y_2 = 19.1$

男 $X_3 = 20$, $Y_3 = 55.8$

女 $X_4 = 8$, $Y_4 = 30.8$

男 $X_5 = 1$, $Y_5 = 17.9$

不要

	Y	D	X	D^2	DX	X^2	YD	YX
$i=1$ (男)								
2 (女)								
3 (男)								
4 (女)								
5 (男)								

仮説検定

男女間で
初任給の格差はあるか？

⇓

$$Y = \overbrace{\alpha + \underbrace{\beta_1}_{\text{初任給の男女差}} D}^{\text{初任給}} + \beta_2 X + u$$

だったので

仮説 $\beta_1 = 0$ を
t検定すればよい。

数値例（続き）

有意水準5%とする。

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = 1.043 \\ SE(\hat{\beta}_1) = 0.262 \end{cases}$$

を用いてよい。

$\Downarrow$

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{SE(\hat{\beta}_1)} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{},$$

また $t_{0.05/2}^{n-(k+1)} = t_{0.025}^{\square-(\square+1)} = \boxed{}$

より，$|t| = \boxed{}\boxed{}\boxed{}$ なので

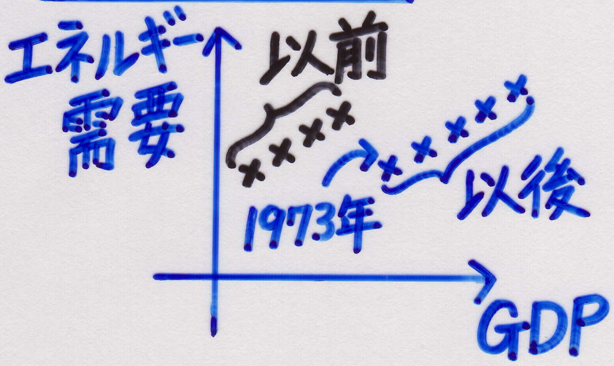
仮説 $\beta_1 = 0$ は有意水準5%で

棄却 $\boxed{}$。

$$\left(\begin{array}{l} k = 2 \\ Y = \alpha + \beta_1 D + \beta_2 X + u \end{array} \right)$$

構造変化

石油危機



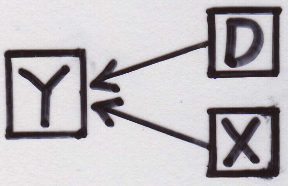
テキスト p.175

・ダミー変数

$$D=\begin{cases}0 : \text{以前}\\ 1 : \text{以後}\end{cases}$$

を用いて

$$Y=\alpha+\beta_1 \underline{D}+\beta_2 \underline{X}+u$$



$$=\begin{cases}\alpha+\beta_2 X+u : \text{以前}(D=0)\\ (\alpha+\underbrace{\beta_1}_{\text{以前と以後の差}})+\beta_2 X+u : \text{以後}(D=1)\end{cases}$$

とすればよい。

・構造変化があるか？

仮説 $\underline{\beta_1=0}$ を検定。

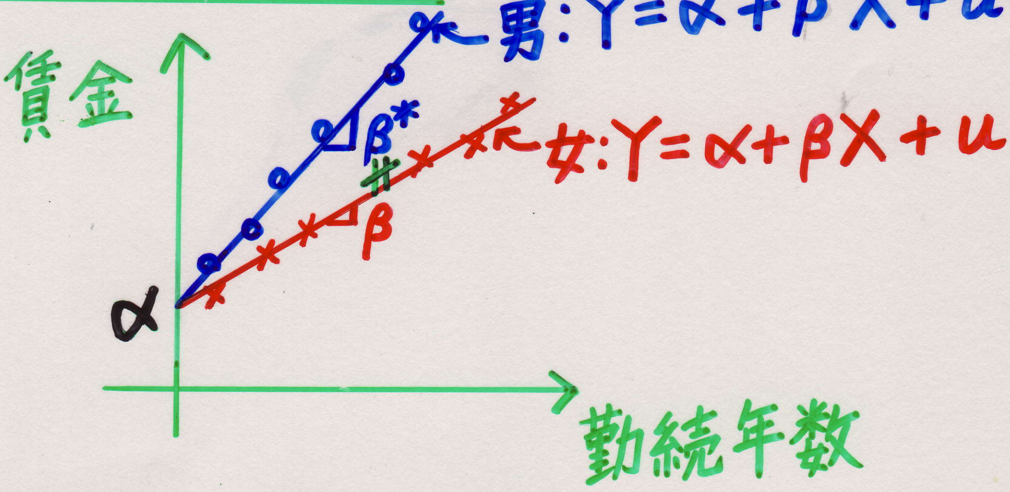
$\Updownarrow$

"構造変化はない"

以上は

定数項ダミー

・係数ダミー



昇給 β^{*}, β の差
(初任給 α は共通)

⇓

次回。