第 2 章

1 階常微分方程式

常微分方程式に含まれる導関数の最高階数を方程式の階数とよび，最高階数が n のものが n 階微分方程式となる．ここでは，まず 1 階の常微分方程式の代表的なものについて，それぞれ解を求める方法を見ていくことにする．

2.1　変数分離法

導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ が x だけの関数と y だけの関数の積になっている

$$\frac{dy}{dx} = X(x)Y(y) \tag{2.1}$$

の型の微分方程式を変数分離型という．

解法

$Y(y) \neq 0$ ならば (2.1) の両辺を $Y(y)$ で割り，x で積分すると

$$\int \frac{1}{Y(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int X(x)dx + C \tag{2.2}$$

上式の左辺は $\displaystyle\int \frac{dy}{Y(y)}$ と変形できるので，

$$\int \frac{1}{Y(y)}dy = \int X(x)dx + C \tag{2.3}$$

となる．ここで C は任意定数である．また，$Y(y) = 0$ の場合は別に調べておく必要がある．

例 1

1.3 節で例としてあげたロジスティック方程式を考えよう．方程式 (1.16) は変数分離型だから，

$$\int \frac{dN}{(a-bN)N} = \int tdt \tag{2.4}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a}\int\left(\frac{1}{N}+\frac{b}{a-bN}\right)dN=\int tdt \tag{2.5}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a}\left\{\ln N-\ln(a-bN)\right\}=t+C \tag{2.6}$$

$$\therefore \quad \frac{N}{a-bN}=e^{aC}e^{at} \tag{2.7}$$

と計算でき，$N(0)=N_0$ とすると，

$$N(t)=\frac{aN_0e^{at}}{a-bN_0+bN_0(e^{at})} \tag{2.8}$$

となる．

(2.8) の振る舞いを考えてみよう．t が小さい場合，$N(t)\simeq N_0e^{at}$ となり，生物個体数は指数関数的に増加する．これは，まだ生物個体数が少なく食住環境が良好で，出生率，死亡率が安定している初期の時期では，$N(t)$ の変化を表すには微分方程式 $\dfrac{dN}{dt}=aN$ は妥当であることを示す．一方，$t\to\infty$ では，$N(t)\to\frac{a}{b}$ となり，一定の個体数に近づくことがわかる．$a-bN_0>0$ の場合，解 (2.8) をグラフで示すと図 2.1 のようになる．

図 2.1　ロジスティック方程式の解曲線

同次型

たとえば，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2} \tag{2.9}$$

のように，

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.10}$$

の形に書ける微分方程式を同次型という．

この微分方程式を解くためには，y の代わりに $u=u/x$ で定義される新しい従属変数 $u(x)$ を導入する．$y=xu$ より，

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx} \tag{2.11}$$

となり，これを (2.10) に代入し，

$$\frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x} \tag{2.12}$$

のように，u についての変数分離型の微分方程式に帰着することができる．

問

微分方程式 (2.9) を解け．

2.2　定数変化法

線形微分方程式

一般に $y(x)$ とその導関数 $y', y'', \ldots$ について，たかだか 1 次の項しか含まない微分方程式を**線形微分方程式**という．それに対して線形でないものは**非線形微分方程式**という．例えば

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \tag{2.13}$$

は y の 1 階導関数しか含まないので，1 階線形微分方程式である．また，$q(x) = 0$ とした

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \tag{2.14}$$

を**同次方程式**，それに対し (2.13) を**非同次方程式**という．あるいは，y を定数倍したときに方程式が変わらない微分方程式を同次方程式，そうでないものを非同次方程式という．

さて，1.3 章にて LCR 電気回路に関する微分方程式を紹介したが，ここでは抵抗とコンデンサーからなる RC について考えよう．回路の微分方程式は

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE(t)}{dt} \tag{2.15}$$

である．

$E(t)$ が一定（直流電源）の場合，(2.15) は

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = 0 \tag{2.16}$$

となる（同次方程式）が，これは変数分離型であり，一般解は

$$I(t) = Ke^{-\frac{1}{RC}t} \tag{2.17}$$

となる（K は任意定数）．

一方，起電力が

$$E(t) = E_0 \sin \omega t \tag{2.18}$$

で表されるような交流電源の場合，(2.15) は

$$R\frac{dI}{dt}+\frac{1}{C}I=E_0\omega\cos\omega t \tag{2.19}$$

となる（非同次方程式）．この解はどのようになるであろうか．ここで，やや天下り的ではあるが，(2.17) の K を t の関数 $K(t)$ として，

$$I(t)=K(t)e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{2.20}$$

を (2.19) に代入する．すると，$K(t)$ に関する微分方程式

$$\frac{dK}{dt}=\frac{E_0\omega}{R}e^{\frac{t}{RC}}\cos\omega t \tag{2.21}$$

が導かれ，$K(t)$ を求めることにより，最終的に K_0 を任意定数として (2.19) の一般解として

$$I(t)=K_0e^{-\frac{t}{RC}}+\frac{\omega E_0C}{1+(\omega RC)^2}(\cos\omega t+\omega RC\sin\omega t) \tag{2.22}$$

と求まる．

以上の，RC 回路に関する微分方程式の例で見たように，1 階線形微分方程式 (2.13) を解くには，次のような手順となる．

1. まず同次方程式 (2.14) の一般解を求める．形式的には A を任意定数として

$$y=Ae^{\int p(x)dx} \tag{2.23}$$

となる．

2. そして，定数 A を x の関数として $A(x)$ でおきかえ，$y=A(x)e^{\int p(x)dx}$ を (2.13) に代入し，$A(x)$ について解く．

$$A(x)=\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C \tag{2.24}$$

3. 求められた $A(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} y&=\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right)e^{\int p(x)dx}\\ &=Ce^{\int p(x)dx}+e^{\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx \end{aligned} \tag{2.25}$$

が (2.13) の一般解となる．

このように，定数を変数とみなして解を得る方法を**定数変化法**という．

ところで，(2.25) をよく見ると，非同次方程式 (2.13) の一般解は

「同次方程式 (2.14) の一般解」＋「非同次方程式 (2.13) の特解」

という形式になっていることがわかる．実は，これは1次だけでなく高階の場合も含む一般の非同次線形方程式に対して成り立つ事柄であることを注意しておく．

> 問
>
> 微分方程式
>
> $$\frac{dy}{dx} + y = 2\sin x \tag{2.26}$$
>
> を解け．

ベルヌーイ方程式

次の型の方程式を**ベルヌーイ (Bernoulli) 方程式**という．

$$\frac{dy}{dx} + p(x) = q(x)y^n \quad (n \neq 0, 1) \tag{2.27}$$

これは，y^n の項を含んでいるので非線形微分方程式である．

解法

新しい従属変数を導入して線形微分方程式に直す．$u = y^{1-n}$ とすると，$\dfrac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$ であるから，(2.27) は

$$\frac{1}{1-n}\frac{du}{dx} + p(x)u = q(x) \tag{2.28}$$

のように**線形化**できる．あとは (2.13) の解法と同じ．

リカッチ方程式

次の型の方程式を**リカッチ (Riccati) 方程式**という．

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0 \tag{2.29}$$

解法

この方程式は，一般解を求積法によって求めることは，一般的には不可能であることが知られているが，1つの特解がわかると線形化できるという特徴がある．

関数 $y_0(x)$ が (2.29) の1つの解であるとすると，

$$\frac{dy_0}{dx} + p(x)y_0^2 + q(x)y_0 + r(x) = 0 \tag{2.30}$$

(2.30)–(2.29) により $r(x)$ が消去されて

$$\frac{d}{dx}(y - y_0) + p(x)(y - y_0)(y + y_0) + q(x)(y - y_0) = 0 \tag{2.31}$$

$u = y - y_0$ により未知関数を u へ変換すると

$$\frac{du}{dx} + (2p(x)y_0 + q(x))u = -p(x)u^2 \tag{2.32}$$

となり，$n = 2$ の場合のベルヌーイ方程式となる．

2.3 積分因数の利用

2.2 節で，定数変化法により，1 階線形微分方程式 (2.13) の一般解として，(2.25) を得た．この一般解を得る過程においては，まず同次方程式 (2.14) の一般解を求めるが，その際変数分離法が用いられる．しかし，変数分離法では $y \neq 0$ を仮定して解いているので，$y = 0$ の場合を別に調べる必要があった．これに対して，一般解 (2.25) を得る過程を次のように解釈してみる．

まず，与えられた方程式 (2.13) の両辺に $e^{\int p(x)dx}$ をかけると

$$\frac{dy}{dx}e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx} \tag{2.33}$$

となるが，この左辺は $\dfrac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right)$ となっている．したがって，

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right) = q(x)e^{\int p(x)dx} \tag{2.34}$$

となり，両辺を積分することにより，

$$ye^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx} + C \tag{2.35}$$

と計算され，一般解が

$$y = \left(\int q(x)e^{\int p(x)dx} + C\right)e^{-\int p(x)dx} \tag{2.36}$$

のように求められる．

以上の議論では，$y \neq 0$ という仮定は用いていないことに注意せよ．

この解き方のポイントは，与えられた微分方程式の両辺にある “適当な関数”（先の例では $e^{\int p(x)dx}$）をかけて (2.34) のように，左辺がある関数の導関数になるようにすることである（右辺は x のみの関数）．この “適当な関数” のことを**積分因数**とよぶ．

この積分因数はどのようにして見つけるとよいだろうか．積分因数を $\mu(x)$ とする．(2.13) の左辺が $\mu(x)$ をかけることにより $\dfrac{d}{dx}(\mu y)$ となればよいから，

$$\mu\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) = \frac{d}{dx}(\mu y) \tag{2.37}$$

とおく．これを展開して $\mu y' + \mu py = \mu' y + \mu y'$，すなわち

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu p \tag{2.38}$$

これより，$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$ が得られる．

問

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = x \tag{2.39}$$

を，定数変化法と積分因数の利用のそれぞれの方法により解け．

2.4　完全微分方程式

(2.3) 節で考えたのは，x が独立変数，y が未知関数という場合，$\dfrac{d}{dx}$(ある関数) の形を導くことであった．今度は，x, y の 2 変数関数関数 $U(x, y)$ の全微分 dU を考える．

一般に，

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) \tag{2.40}$$

なる関数 $U(x, y)$ が存在するとき，微分方程式

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{2.41}$$

を**完全微分方程式**という．このとき，$dU(x, y) = 0$ となり，一般解は

$$U(x, y) = C \tag{2.42}$$

となる．

実際，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{2.43}$$

が成り立つとき，$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ は完全微分方程式となることが保証される．

例

次の微分方程式の一般解を求める．

$$(2xe^y + 1)dx + (x^2e^y + 2y)dy = 0 \tag{2.44}$$

$P(x, y) = 2xe^y + 1$, $Q(x, y) = x^2e^y + 2y$ とすると $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xe^y$ となるので，(2.44) は完全微分方程式である．そこで，(2.40) を満たす関数 $U(x, y)$ を求める．

$\dfrac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) = 2xe^y + 1$ より

$$U(x, y) = x^2e^y + x + F(y) \tag{2.45}$$

$\dfrac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) = x^2e^y + 2y$ より

$$U(x, y) = x^2e^y + y^2 + G(x) \tag{2.46}$$

$F(y) = y^2 + A$, $G(x) = x + A$ とおけば (2.45) と (2.46) は一致する．定数 A を (2.42) の C に含めて，一般解は $x^2e^y + x + y^2 = C$ と求められる．