

第 10 章

データ解析

本章では、これまでに扱ったフーリエ解析を実際の時系列データの解析にいかに応用するかを見るため、いくつかのデータを例に取り上げ、パワースペクトル、相関関数を計算してみる。その過程ではもちろん離散フーリエ変換を FFT のアルゴリズムを用いて計算している。なお、計算にあたっては Maple の Discrete Transforms パッケージを利用した。^{*1}

10.1 為替レート

PACIFIC Exchange Rate Service^{*2}からダウンロードした、US ドルと日本円の為替レートの 2003 年 1 月 2 日から 2004 年 12 月 31 日の 2 年間のデータ (図 10.1 左) のうち、比較の変動の落ち着いた 2003 年 10 月 1 日から 2004 年 9 月 30 日までのデータ (図 10.1 右) について、簡単な解析を行ってみよう。2003 年 10 月 1 日から 2004 年 9 月

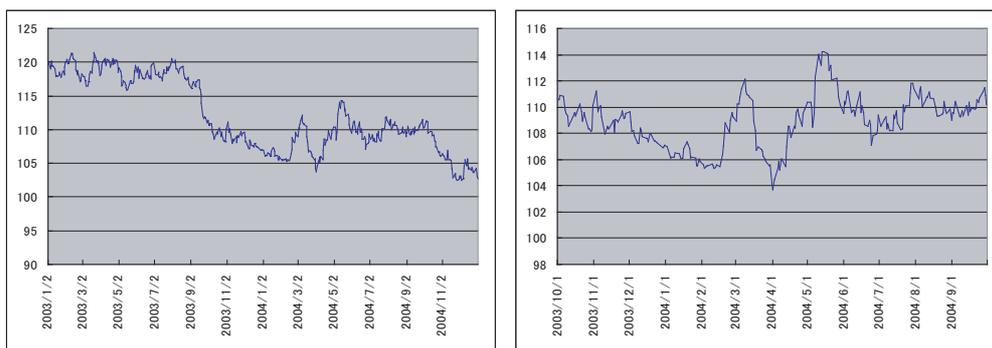


図 10.1 US ドルと日本円の為替レート。(左) 2003 年 1 月 2 日 ~ 2004 年 12 月 31 日, (右) 2003 年 10 月 1 日 ~ 2004 年 9 月 30 日。

30 日までのデータを解析に用いたのは、パワースペクトルと自己相関関数との間に成り

^{*1} Maple の離散フーリエ変換は $\tilde{x}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i \frac{2\pi n k}{N}}$ と定義されており、よってパワースペクトルを $P_k = |\tilde{x}_k|^2 / \sqrt{N}$ で計算する。

^{*2} <http://fx.sauder.ubc.ca/>

立つウィーナーヒンチンの定理は定常過程を前提にしているからである。

まずパワースペクトルを計算し、図示すると図 11.2 のようになる。パワースペクトルは $k = 0$ 付近で鋭いピークを持つが、これは全区間を 1 周期とみなしていることと同じであり、逆にそれ以外の k では大きな値のピークは見られない。すなわち、周期性はみられないということである。

パワースペクトルのフーリエ逆変換により自己相関関数を計算すると、図 11.3 となる。これも、 $k = 0$ 付近以外では大きな値を持っておらず、明確な構造がみられない。すなわち、少なくとも 1 日ごとの為替レートの時系列においては周期性などの特徴は見られないと言える。

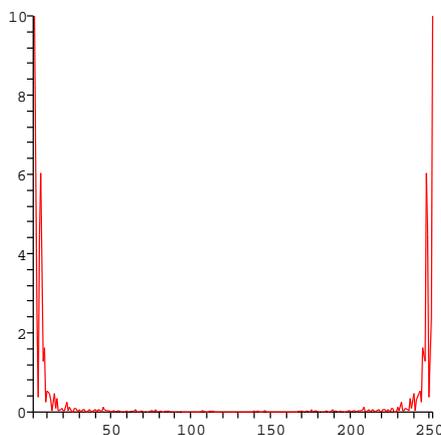


図 10.2 US ドルと日本円の為替レートのパワースペクトル。

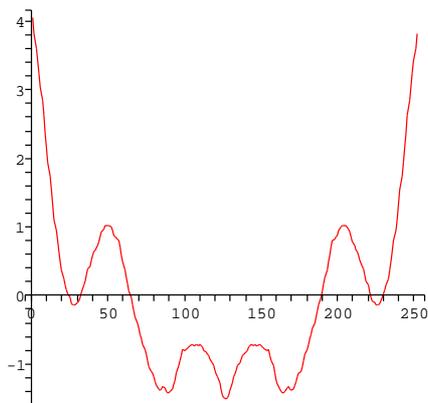


図 10.3 US ドルと日本円の為替レートの自己相関関数。

10.2 為替レート 2

次に，図 11.4 で示された為替レートの時系列データを取り上げてみよう．激しく変動する中でも，周期的な変動も見られるようである．

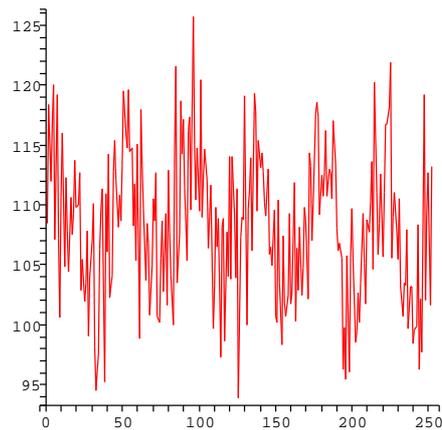


図 10.4 為替レートの時系列データ．

パワースペクトルを計算すると図 11.5 左となり， $k = 6$ 付近に鋭いピークが見られる．これは全区間（期間）を 6 回振動するような角振動数をもつ成分，すなわち 2 ヶ月を周期とするような成分が主要成分であることを意味している．確かに，自己相関関数（図 11.5 右）を計算してみても，明らかな構造が見られる．

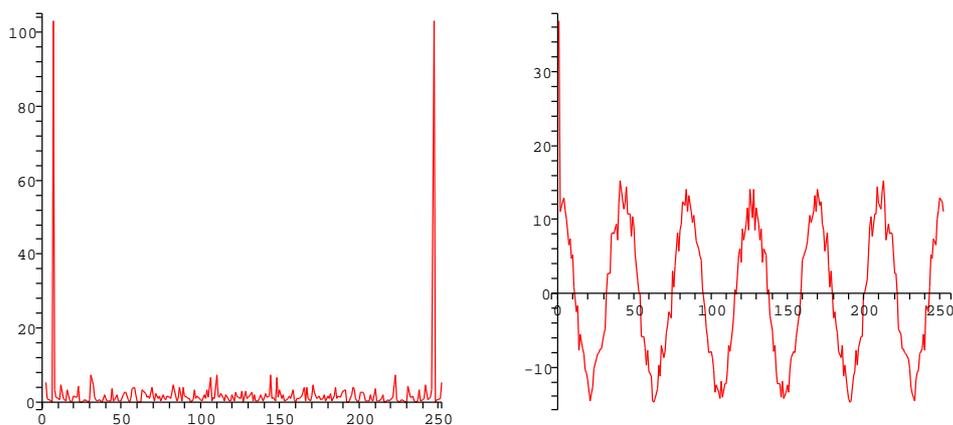


図 10.5 パワースペクトルと自己相関関数．

実はもとのデータ（図 11.4）は約 2 ヶ月の周期で変動するデータに，ホワイトノイズを加えて作成した，人為的な時系列データである．

10.3 太陽黒点データ

図 11.6 は ROYAL OBSERVATORY OF BELGIUM^{*3} の Web サイトからダウンロードした太陽黒点数の年次変化（1700 年から 2004 年）の時系列データである。

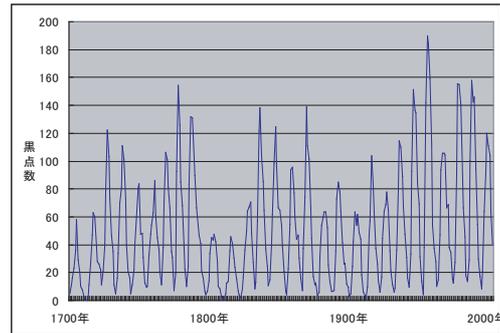


図 10.6 太陽黒点数の年次変化。

この時系列データを見ると、約 10 年の周期で増加減少を繰り返しているが、その周期は幅があることがわかる。実際にパワースペクトル（図 11.7）を計算してみると $k = 30$ 付近にピークが見られる。これは、 $(2004 - 1700)/30 = 10.13$ 年の周期で振動する成分が主要であることがわかる。図 11.8 右は自己相関関数で、一種の構造が見られる。

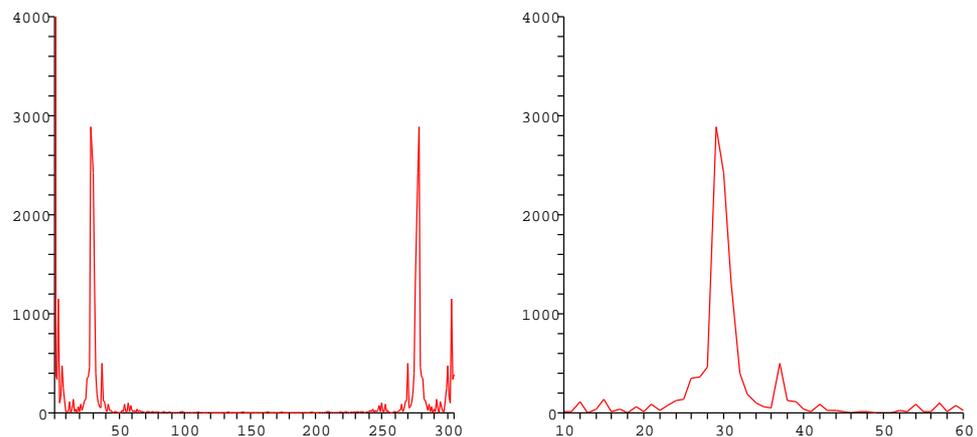


図 10.7 太陽黒点数の年次変化のパワースペクトル（右は $k = 30$ 付近の拡大図）。

^{*3} <http://sidc.oma.be/html/sunspot.html>

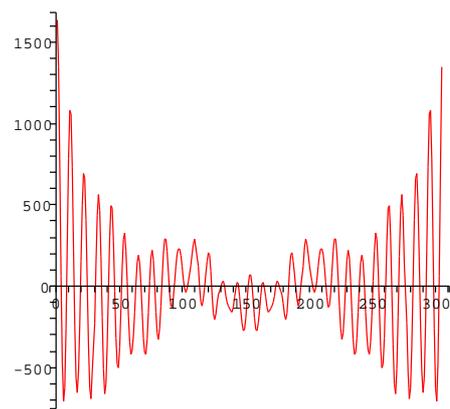


図 10.8 太陽黒点数の年次変化の自己相関関数 .