第 1 章

微分方程式の基礎概念

1.1 微分

直線上を運動している物体を考える．物体の位置 x が時間 t の関数として，ある時刻 a から時間 h だけ経過した時の $x(t)$ の変化の割合は

$$\bar{v} = \frac{x(a+h) - x(a)}{h} \tag{1.1}$$

と書くことができ，$\bar{v}$ は $x(t)$ の平均変化率，あるいは平均速度と考えられる．ここで，$h \to 0$ の極限を考える．このとき分子も小さくなり，$\bar{v}$ は h によらないある極限値に近づくことが期待できる．こうして

$$v(a) = \lim_{h\to 0} \frac{x(a+h) - x(a)}{h} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=a} \tag{1.2}$$

を定義し，平均速度 $\bar{v}$ に対して，時刻 a における瞬間速度となる．$\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=a}$ は $\dot{x}(a)$ とも表し，関数 $x(t)$ の時刻 $t = a$ における微分係数あるいは微係数という．運動が急に変化するようなとき（たとえば，運動中に急激な外力が働くなど）は (1.2) が存在しないかもしれない，そのような場合は，$x(t)$ は $t = a$ で微分不可能であるという．

特定の時刻 $t = a$ だけでなく，変数 t の範囲全体で微分係数を考えるときには，これを導関数とよび，$\dfrac{dx(t)}{dt}$ あるいは $\dot{x}(t)$ と書く．導関数 $\dot{x}(t)$ についても極限

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dot{x}(t+h) - \dot{x}(t)}{h} \tag{1.3}$$

を考えることができ，この極限が存在するとき $x(t)$ の 2 階導関数とよび，$\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ あるいは $\ddot{x}(t)$ と書く．物理的には瞬間的な加速度に他ならない．一般に関数 $x(t)$ が n 回微分可能なとき，n 回微分した関数を $x(t)$ の n 階導関数といい，$x^{(n)}(t)$ とか $\dfrac{d^nx(t)}{dt^n}$ と書く．

1.2　微分方程式とは

物体の自由落下を考えよう．ある基準点から鉛直上方に向う直線を x 軸とする．ことのき，物体の位置 x は時間 t の関数で，物体の加速度は $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ である．したがって，重力加速度を g とすると

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \tag{1.4}$$

となる．これは $x(t)$ の満たす関係式が，$x(t)$ の微分を用いて表わされているもので，この式のように方程式の中に導関数を含むものを微分方程式という．とくに，(1.4) のように未知関数 x が 1 つの変数 t だけに依存する場合には常微分方程式と呼ぶ．なお，物体の質量を m とすれば，ニュートンの運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg \tag{1.5}$$

で表される．初期位置，初期速度がそれぞれ $x(0) = x_0$，$\dot{x}(0) = v_0$ のとき，(1.4) の解が

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0 \tag{1.6}$$

で与えられることは，(1.4) を t で積分することで容易に得られ，また (1.6) を (1.4) に代入して確かめることができる．

先ほどの例は，位置 x に関する微分方程式が時間 t の関数として陽に表わされた場合であったが，次の場合はどのように微分方程式が表わされるであろうか．2 次元平面上を運動するある物体を考える．この物体からは常に左舷 90 の方向に原点があるものとする．この物体の経路はどのように表わされるか．ある時刻 t ににおける物体の位置を (x, y) とする．この時の速度ベクトルは $\left(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}\right)$ であるから，満たすべき関係式は

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \cdot (x, y) = 0 \tag{1.7}$$

すなわち

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{1.8}$$

となる．(1.8) を図示すると図 1.1 のようになり，物体の進行方向の場が現される．したがって，物体の経路は原点を中心とする同心円

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1.9}$$

となることは容易に予想がつく．r は初期条件 $(x(0), y(0))$ により決められる．(1.9) のように，解が時刻 t の陽関数ではなく，陰関数のまま表わされる場合もある．

以上，見たように微分方程式とは，状態が変化する割合いが従う関係式を表わしたものと考えることができる．この方程式を解くことは，状態がどのように変化していくか予測することを意味し，また，たとえ解けなくても瞬間瞬間での状態をつなげていくことによっても，状態変化を予測することができる．これは数理科学の本質的な部分である．

図 1.1

1.3　自然や社会の現象に現れる微分方程式

自然界の様々な現象，さらには社会現象まで微分方程式で表されるものは数多くある．

例 1

図 1.2 のように，上端を固定して鉛直につるしたばね定数 k の軽いばねに，質量 m のおもりがとりつけられている．ただし，おもりはダッシュポットにより速度に比例した抵抗が作用するものとする．この運動はどのような微分方程式で表されるだろうか．

図 1.2　抵抗を考慮したばねの振動

時刻 t における，おもりの釣り合いの位置からのずれを x とする．鉛直下向きを正とすると，おもりに働く力は下向きに重力 mg，ばねによる弾性力 $-kx$，ダッシュポットによる抵抗力 $-\gamma\dfrac{dx}{dt}$ である．（外力は考慮にいれていない．）おもりの加速度は $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ であるから，運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - \gamma\frac{dx}{dt} - k(x+l), \tag{1.10}$$

すなわち

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{1.11}$$

となる．ここで，l はおもりがつりあいの位置にあるときのばねの伸びである．なお，外力 $f(t)$ が働く場合は，

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = f(t) \tag{1.12}$$

となる．

例 2

図 1.3 のように，インダクタンス L のコイル，容量 C のコンデンサー，抵抗値 R の抵抗からなる電気回路を考える．このとき，起電力を $E(t)$ とすると，回路を流れる電流 I は

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int^t I(s)ds = E(t) \tag{1.13}$$

で支配される．この式を t で微分すると

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE(t)}{dt} \tag{1.14}$$

となる．(1.14) は (1.12) と形式的には同じ形をしており，定数係数線形微分方程式とよばれる．これらの微分方程式の解析は 3 節で扱う．

図 1.3　LCR 電気回路

例 3

人口の増加，あるいはもっと一般的に生物の個体数の増加はどのような微分方程式で表されるであろうか．個体数を $N(t)$，増加率を $a(> 0)$ とすると

$$\frac{dN}{dt} = aN \tag{1.15}$$

の微分方程式で表されるであろう．$N(t) = N(0)e^{at}$ が (1.15) の解であることは直接代入してみれば確かめられるが，これだと $N(0) = 0$ でない限り，N は指数関数的に増加し続けることになる（マルサスの法則）．しかし N が大きいと増加率は抑えられ（餌の奪いあいなどのため），増加は頭打ちになると考えられる．そこで，増加率を N の関数として a

の代わりに $a - bN$ とするのは，自然な拡張である．結局，生物の個体数の増加を表す微分方程式は，

$$\frac{dN}{dt} = (a - bN)N \tag{1.16}$$

となる．これはロジスティック方程式と呼ばれており，これの方程式の解析は 2 節で扱う．

以上，例をあげた微分方程式は後で見るように，解析的な扱いが可能な方程式の例である．しかしながら，一般的に微分方程式は解析的に解けないものがほとんどで，そのような場合には近似解法，数値解法に頼らざるを得ない．

例 4

図 1.4 のような単振り子の運動は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{1.17}$$

なる微分方程式で表される．非常に単純な微分方程式であるが，特殊関数を用いない限り解析的には解けない．

問

微分方程式 (1.17) を導出せよ．

図 1.4　単振り子

例 5

図 1.5 のような 2 重振り子は，運動方程式（微分方程式）を導出することはできるが，小振幅の場合を除いて解析的には解けない．ただし，数値計算で解いて運動を追うことはできる．

図 1.5　2 重振り子