WSkS (Weakly Second-order monadic logic with k Successors)

- k種類のアルファベットからなる文字列とその集合を表す変数を持つ論理
- 例：$\forall x.(x \in X \Rightarrow x \in Y)$
- 充足可能性が決定可能

- WSkS の構文
  - 項：１階変数 $x, y, z \ldots$ と $1, \ldots, k$ からなる文字列 (変数は左端のみ可)

    例：x1123, 211, ε
  - 原始式：$s = t$, $s \leq t$, $s \geq t$, $t \in X$
    (項を s,t で、２階変数を X,Y などで表す)
  - 式：$\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, $\exists x$, $\forall x$, $\exists X$, $\forall X$ を使って原始式から作られる

- WSkS の意味
  - 項は文字列として解釈
  - 1 階変数 x は文字列を表す、2 階変数 X は文字列の集合を表す
  - $=$ は文字列の等しさ、$\in$ は「属す」、$\leq$ はプレフィックス
    例：$13 \leq 1322$、$11 \not\leq 121$
  - ϕ を自由変数 $x_1, \ldots, x_n, X_1, \ldots, X_m$ を持つ式、$t_i \in \{1, \ldots, k\}^*$、$S_i \subseteq \{1, \ldots, k\}^*$ とするとき、

$$t_1, \ldots, t_n, S_1, \ldots, S_m \models \phi$$

は、x_i に t_i を、X_i に S_i を割り当てたとき ϕ が成立することを表す

- 式の例と略記法
  - 部分集合 $X \subseteq Y$

    $$\forall x.(x \in X \Rightarrow x \in Y)$$

  - 集合の等しさ $Y = X$

    $$Y \subseteq X \wedge X \subseteq Y$$

  - 集合が空 $X = \emptyset$

    $$\forall Y.(Y \subseteq X \Rightarrow Y = X)$$

  - 積が空 $X \cap Y = \emptyset$

    $$\forall x.((x \in X \Rightarrow x \notin Y) \wedge (x \in Y \Rightarrow x \notin X))$$

  - 単一集合 $Sing(X)$

    $$X \neq \emptyset \wedge \forall Y.(Y \subseteq X \Rightarrow (Y = X \vee Y = \emptyset))$$

- 式の例と略記法(続き)
  - 有限個の和集合 $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$

    $$\bigwedge_{i=1}^{n} X_i \subseteq X \wedge \forall x.(x \in X \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} x \in X_i)$$
  - 分割 $Partition(X, X_1, \ldots, X_n)$

    $$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i \wedge (\bigwedge_{i=1}^{n-1} \bigwedge_{j=i+1}^{n} X_i \cap X_j = \emptyset)$$
  - プレフィックス $x \leq y$: (つまり$\leq$は本質的でない)

    $$\forall X.(y \in X \wedge (\forall z.(\bigvee_{i=1}^{k} zi \in X) \Rightarrow z \in X) \Rightarrow x \in X)$$
  - プレフィックスで閉じている $PrefixClosed(X)$:

    $$\forall x.\forall y.((x \in X \wedge y \leq x) \Rightarrow y \in X)$$

問：以下を表す**WSkS**式を書け。

(a) 集合 X は1で始まる文字列を持つ。

(b) 集合 X の要素数は**2**である。

- 構文の制限：今後の証明を簡単にするために記述力が等価に保ちつつ、原始式中の演算を以下のみに、変数を２階変数のみに限定する
  - $X \subseteq Y$、$Sing(X)$、$X = Yi$、$X = \varepsilon$
  - $X = Yi$の解釈は、XとYがそれぞれ単集合$\{t\}$,$\{s\}$で、かつ、$t = si$を満たすとき真とする
  - ϕを制限された**WSkS**式とするとき、その充足性を以下のように表す

$$S_1, \ldots, S_n \models \phi$$

- 命題**1**：**WSkS**論理式から、それと等価な制限された構文の論理式への変換T が存在する。すなわち、

  $$s_1, \ldots, s_n, S_1, \ldots, S_m \models \phi$$

  iff

  $$\{s_1\}, \ldots, \{s_n\}, S_1, \ldots, S_m \models T(\phi)$$

  また、逆変換T'も存在する

- 証明：Tの構成を示す。T'は省略。

  $$\begin{aligned} T(ti \in X) &= T(\exists y.(y = ti \wedge y \in X)) \\ T(y \in X) &= X_y \subseteq X \end{aligned}$$

- 証明 (続き) :

$$T(t = s) \;=\; T(\exists z.z = t \wedge z = s)$$

(tとsが変数でないとき)

$$T(x = ti) \;=\; T(\exists z.z = t \wedge x = zi)$$

(tが変数でないとき)

$$T(x = yi) \;=\; X_x = X_y i$$

$$T(x = \varepsilon) \;=\; X_x = \varepsilon$$

$$T(x = y) \;=\; X_x = X_y$$

$$T(\phi \vee \psi) = T(\phi) \vee T(\psi)$$

$$T(\neg\phi) = \neg T(\phi)$$

$$T(\exists X.\phi) = \exists X.T(\phi)$$

$$T(\exists x.\phi) = \exists X_y.(Sing(X_y) \wedge T(\phi))$$

WSkSで定義可能な関係はNFTAで認識可能

- 文字列の集合間の関係 R が**WSkS**で定義可能：
  $S_1, \ldots, S_n \subseteq \{1, \ldots, k\}^*$ について、以下を満たす**WSkS**式 ϕ が存在する

  $$(S_1, \ldots, S_n) \in R \textbf{ iff } S_1, \ldots, S_n \models \phi$$

- $(S_1, \ldots, S_n)$の木表現$t = (S_1, \ldots, S_n)^{\sim}$

  Pos$(t) =$

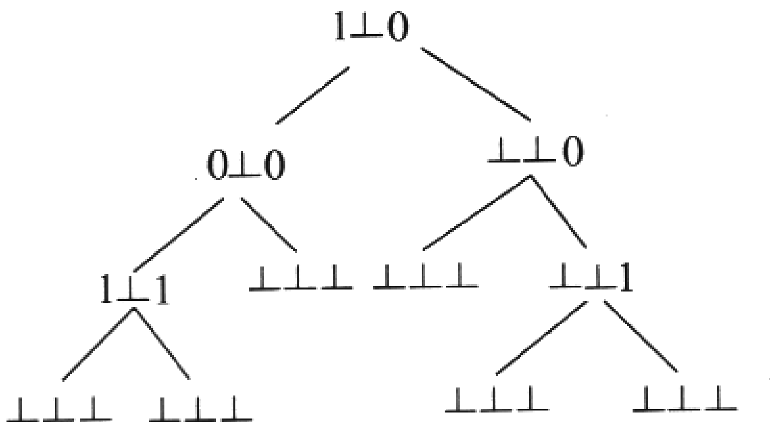
  $\{\varepsilon\} \cup \{pi \mid \exists p' \in \cup_{j=1}^{n} S_j, p \leq p', i \in \{1, \ldots, k\}\}$

  $t(p) = \alpha_1 \cdots \alpha_n$

  ここで、各α_iは

  $$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \textbf{if } p \in S_i \\ 0 & \textbf{if } p \notin S - i, \exists p' \in S_i\ p < p' \\ \perp & \textbf{otherwise} \end{cases}$$

- 例: $k = 2$、$A = \{\varepsilon, 11\}$、$B = \emptyset$、$C = \{11, 22\}$のとき、$(A, B, C)^{\sim} =$

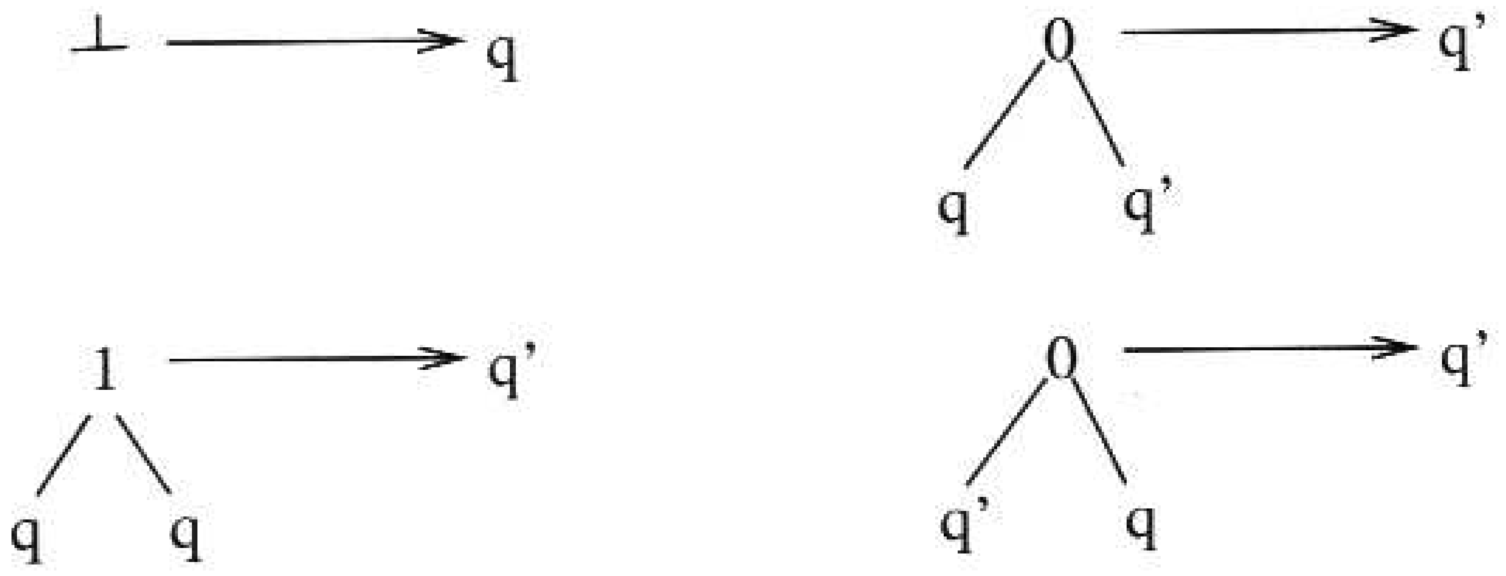


- 定理**2**：文字列の集合の関係Rが**WSkS**で定義可能ならば、以下で定義される言語を認識するオートマトンが存在する

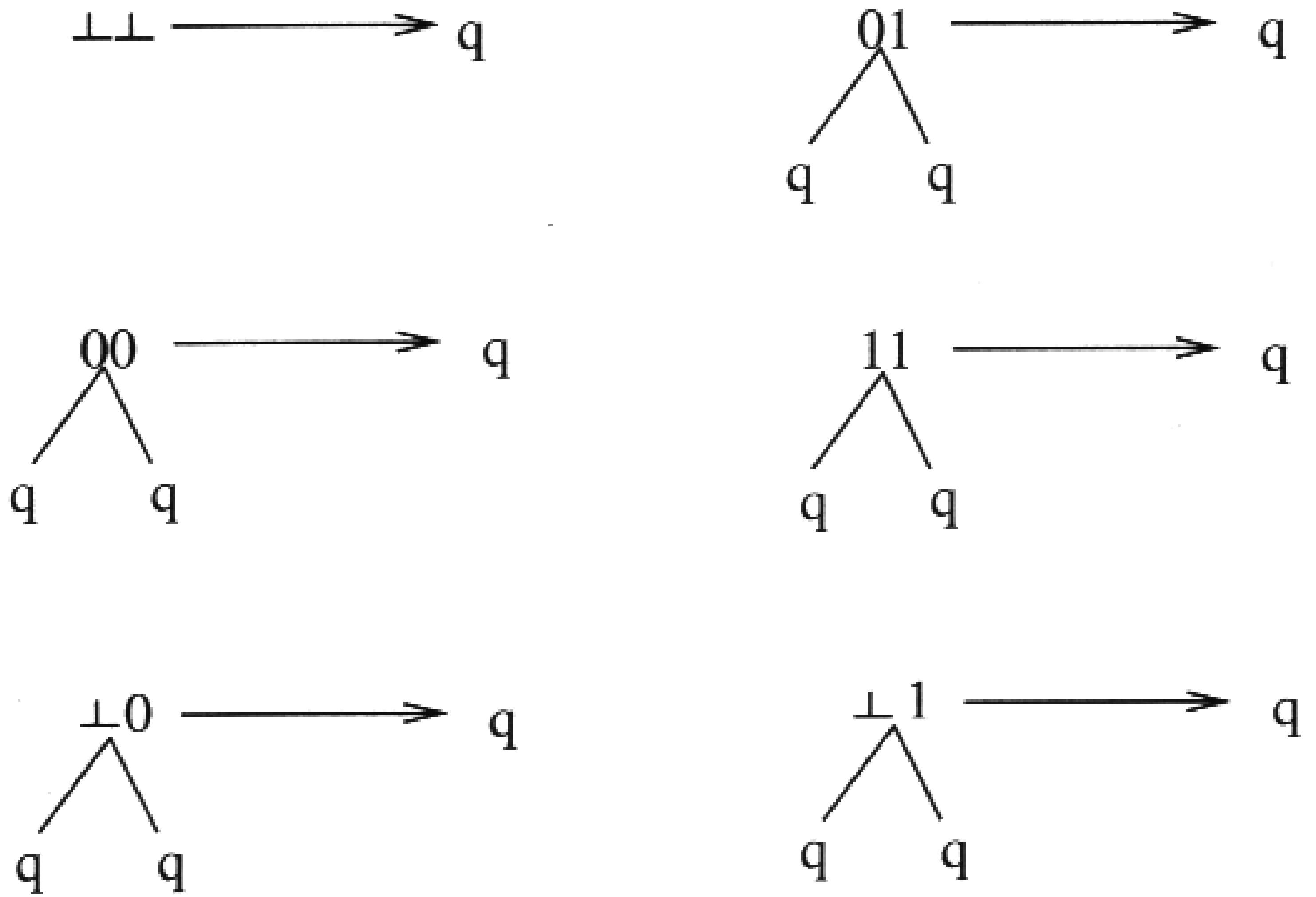
  $$\tilde{R} = \{(S_1, \ldots, S_n)^{\sim} \mid (S_1, \ldots, S_n) \in R\}$$

- 証明：命題**1**より、ϕは制限された構文の**WSkS**式としてよい。ϕの構造に関する帰納法で証明する。
  以下では$k = 2$の場合を示す。

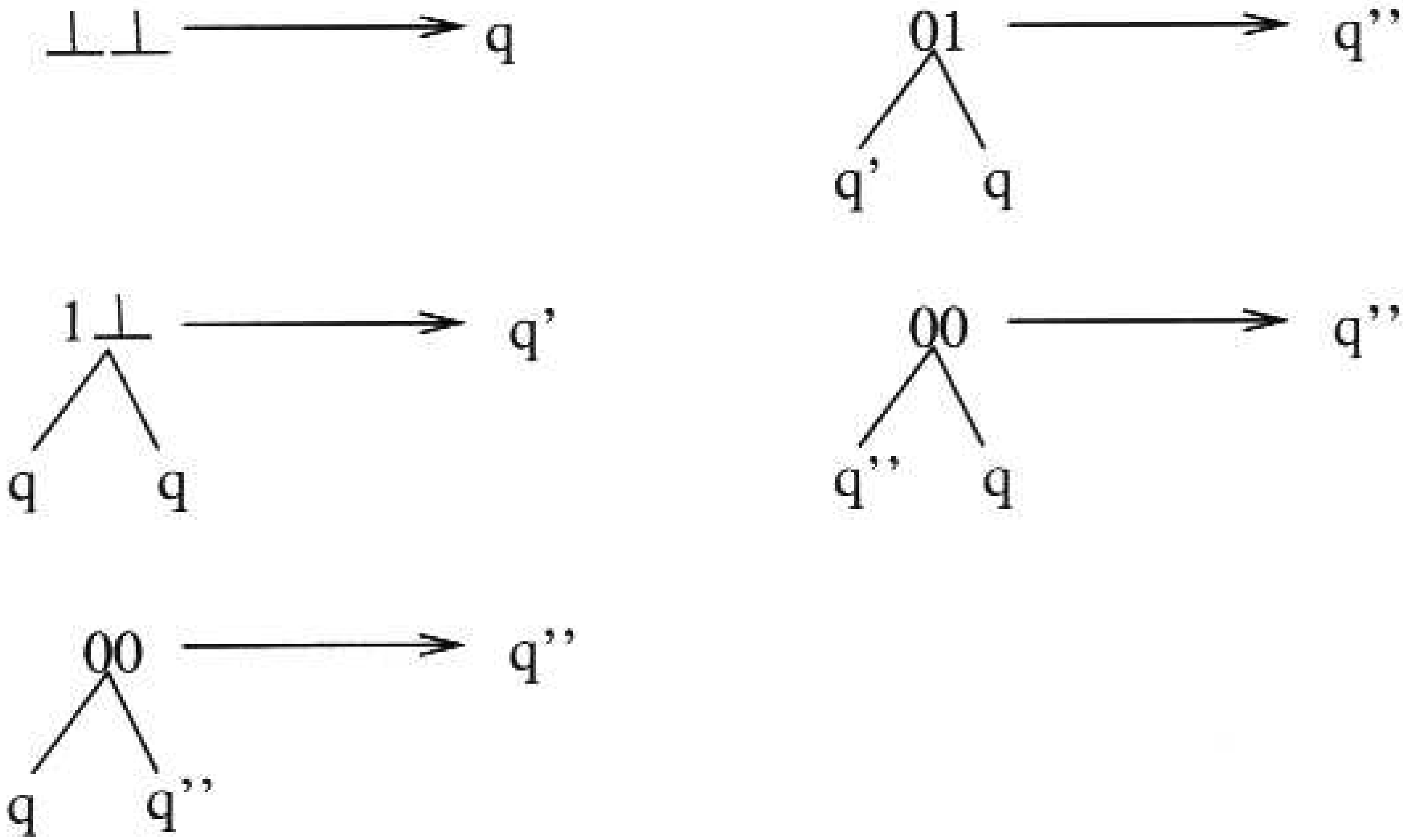
- 証明(続き)
  - ϕが$Sing(X)$のとき、q'を受理状態として、



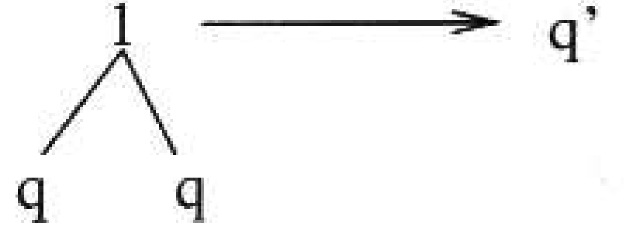
- 証明 (続き)
  - ϕ が $X \subseteq Y$ のとき、q を受理状態として、



- 証明(続き)
  - ϕが$X = Y1$のとき、q''を受理状態として、



- 証明(続き)
  - ϕが$X=\varepsilon$のとき、q'を受理状態として、



  - ϕが$\neg\phi'$のとき、帰納法の仮定よりϕ'が定義する関係R'を認識する木オートマトンA'が存在する。R_1の補集合を認識する木オートマトンを作ればよい。
  - ϕが$\exists X_i.\phi'$のとき、ϕが表す関係はϕ'が表す関係のi番目の射影。よってϕ'から作った木オートマトンA'の各規則

    $\cdots\alpha_i\cdots(\cdots) \to q$ を $\cdots \quad \cdots(\cdots) \to q$

    に変更する

- 証明 (続き)
  - ϕ が $\phi' \vee \phi''$ を考える。簡単のために、

    ϕ' 中の自由変数が $X_1 \ldots X_i \ldots X_n$

    ϕ'' 中の自由変数が $X_1 \ldots \quad \ldots X_n$

    とする。ϕ'' から作った木オートマトン A'' の各規則

    $\cdots \quad \cdots(\cdots) \to q$ を三つの規則

    $\cdots 0 \cdots (\cdots) \to q$

    $\cdots 1 \cdots (\cdots) \to q$

    $\cdots \perp \cdots (\cdots) \to q$

    に変更する。これと、ϕ' から作った木オートマトン A' の言語の和を認識する木オートマトンをつくればよい

- 系**3**：**WSkS**式の充足可能性問題は決定可能である
- 証明：与えられた**WS1S**式ϕから定まる関係をRとする。定理**2**より、$\tilde{R}$を認識するオートマトンAが存在する。「$R = \emptyset$ **iff** $\tilde{R} = \emptyset$」より、Aの空問題を判定すればよい。

NFTAで認識可能な関係はWSkSで定義可能

- 木tのコーディング$\overline{t}$
  - 例：$f(g(a), a)$は、4つの集合(S, S_f, S_g, S_a)で表せる。ここで、$S = \{\varepsilon, 1, 11, 2\}$、$S_f = \{\varepsilon\}$ $S_g = \{1\}$ $S_a = \{11, 2\}$
- 集合の組が木のコーディングであるかの判定

$Term(X, X_{f_1}, \ldots, X_{f_n})$: $X \neq \emptyset$

$$\wedge\, Partition(X, X_{f_1}, \ldots, X_{f_n}) \wedge PrefixClosed(X)$$

$$\wedge \bigwedge_{i=0}^{k} \bigwedge_{\mathrm{arity}(f_j)=i} \forall x \left(x \in X_{f_j} \Rightarrow \left(\bigwedge_{\ell=1}^{i} x\ell \in X \wedge \bigwedge_{\ell=i+1}^{k} x\ell \notin X \right)\right)$$

- 定理**4:** Lをアルファベット$\mathcal{F}$上の正規木言語とするとき、次を満たす**WSkS**式ϕが存在する

  $t \in L$ **iff** $\bar{t} \models \phi$

- 証明 : $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$、$L = L(A)$を満たす**NFTA**を

  $A = (Q, \mathcal{F}, Q^f, \Delta)$

  とする。ここで、

  $Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$、

  $\bar{t} = (S, S_{f_1}, \ldots, S_{f_n})$

  とする。

- 証明 (続き)
  このとき、ϕ は自由変数 $X, X_{f_1}, \ldots, X_{f_n}$ をもつ以下の式で書ける。

$$\exists Y_{q_1}, \ldots, \exists Y_{q_m}. Term(X, X_{f_1}, \ldots, X_{f_n})$$
$$\wedge\, Partition(X, Y_{q_1}, \ldots, Y_{q_m})$$
$$\wedge \bigvee_{p \in Q_f} \varepsilon \in Y_p$$
$$\wedge\, \forall x. \bigwedge_{f \in \mathcal{F}} \bigwedge_{p \in Q} ((x \in X_f \wedge x \in Y_p)$$
$$\Rightarrow \bigvee_{f(p_1, \ldots, p_\ell) \to p \in \Delta} \bigwedge_{i=1}^{\ell} xi \in Y_{p_i})$$

- 系**5:** Recは、**WSkS**で定義可能である。
- 証明： Recに属する関係Rについて、定理**4**より以下を満たす**WSkS**式ϕが存在する。

$$(t_1,\ldots,t_n) \in R \textbf{ iff } \overline{[t_1,\ldots,t_n]} \models \phi$$