木文法

- 正規木文法： $G = (N, \mathcal{F}, R, S)$
  - N: 非終端記号の集合
  - $\mathcal{F}$: 終端記号 (関数記号) の集合
  - R: 生成規則の集合

    各生成規則は以下の形式

    $$A \to \alpha \quad (A \in N,\ \alpha \in \mathrm{T}(\mathcal{F} \cup N))$$
  - S $(\in N)$: 開始記号

- 例： $G = (\{List, Nat\}, \{0, nil, s(), cons(,)\}, R, List)$
  ここで、Rは以下の要素からなる

  $List \rightarrow nil$, $List \rightarrow cons(Nat, List)$,

  $Nat \rightarrow 0$, $Nat \rightarrow s(Nat)$

  \- $cons(s(0), nil)$の生成

  $$\begin{aligned} & List \\ \rightarrow_G\ & cons(Nat, List) \\ \rightarrow_G\ & cons(s(Nat), List) \\ \rightarrow_G\ & cons(s(0), List) \\ \rightarrow_G\ & cons(s(0), nil) \end{aligned}$$

- 導出関係 $\rightarrow_G$ $\boldsymbol{(}\subseteq \mathsf{T}(\mathcal{F}\cup N)\times \mathsf{T}(\mathcal{F}\cup N)\boldsymbol{)}$**:** 以下を満たす最小の集合
  - $R\subseteq\ \rightarrow_G$
  - $\alpha \rightarrow_G \beta$ ならば $f(\cdots\alpha\cdots)\rightarrow_G f(\cdots\beta\cdots)$
- G が生成する言語：

  $L(G)=\{s \mid S\rightarrow_G^* s\in \mathsf{T}(\mathcal{F})\}$

- 定理：正規木文法が生成する言語のクラスは、正規木言語
- 証明 ($\supseteq$)： **NFTA** $A = (Q, \mathcal{F}, Q^f, \Delta)$ から正規木文法 $G = (Q \cup \{S\}, \mathcal{F}, R, S)$ を作る。ここで R は以下の規則。
  - 各 $q \in Q^f$ について、$S \to q$
  - 各 $f(q_1, \ldots, q_n) \to q$ について、$q \to f(q_1, \ldots, q_n)$
- 略証 ($\subseteq$)： 正規木文法 $G = (N, \mathcal{F}, R, S)$ から **NFTA** $A = (N \cup Q, \mathcal{F}, \{S\}, \Delta)$ を作る
  - $List \to cons(s(Nat), List) \in R$ に対して、新たな状態 q を導入し、以下のように Δ 規則を作る

    $s(Nat) \to q$

    $cons(q, List) \to List$

- 問**5-1**：$\mathcal{F} = \{a, g(), f(,)\}$とする。$q_\varepsilon$を受理状態とする以下の**NFTA**と等価な正規木文法を示せ

$$\begin{aligned} a &\rightarrow q_a \\ f(q_a, q_\perp) &\rightarrow q_1 \\ g(q_1) &\rightarrow q_\varepsilon \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &\rightarrow q_\perp \\ g(q_\perp) &\rightarrow q_\perp \\ f(q_\perp, q_\perp) &\rightarrow q_\perp \end{aligned}$$

- 問**5-2**：$\mathcal{F} = \{a, g(), f(,)\}$とする。$X$を開始記号とする以下の正規木文法と等価な**NFTA**を示せ

$$X \rightarrow f(g(A), A)$$
$$A \rightarrow g(g(A))$$
$$A \rightarrow a$$

- 問**5-3**：**4**ページの証明**(**$\supseteq$**)**を完成させせよ。すなわち、任意の$t \in \mathrm{T}(\mathcal{F})$**,** $q \in Q$**,** $n \in N$に対して、$t \rightarrow_A^n q$ならば$q \rightarrow_G^* t$であることをnに関する帰納法で示せ。

正規木表現

- 例 : $f(\square,\square)^{*,\square}\ {.}_{\square}\ a$ は、言語 $\mathsf{T}(\{f(,),a\})$ を表す正規木表現
- 例 : $s(\square)^{*,\square}\ {.}_{\square}\ \mathsf{0}$ は、言語 $\{s^n(\mathsf{0}) \mid n \geq \mathsf{0}\}$ を表す正規木表現
- 例 : $cons((s(\square_1)^{*,\square_1}\ {.}_{\square_1}\ \mathsf{0}),\square_2)^{*,\square_2}\ {.}_{\square_2}\ nil$ は、**List** を表す正規木表現

- 置き換えを表す変数の集合$\mathcal{K} = \{\square_1, \ldots\}$
- 木代入: (スライド1の代入とは異なるので注意)
  $t \in \mathsf{T}(\mathcal{F} \cup \mathcal{K})$、各$L_i$を木言語とする

$$
\begin{aligned}
& t\{\square_1 \leftarrow L_1, \ldots, \square_n \leftarrow L_n\} \\
& = \begin{cases}
L_i & \cdots \textbf{if } t = \square_i \\
\{a\} & \cdots \textbf{if } t = a \in \mathcal{F} \\
\{f(t_1, \ldots, t_n) \mid t_i \in s_i\{\square_1 \leftarrow L_1, \ldots, \square_n \leftarrow L_n\}\} & \\
& \cdots \textbf{if } t = f(s_1, \ldots, s_n)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& L\{\square_1 \leftarrow L_1, \ldots, \square_n \leftarrow L_n\} \\
& = \bigcup_{t \in L} t\{\square_1 \leftarrow L_1, \ldots, \square_n \leftarrow L_n\}
\end{aligned}
$$

- 例: $f(\square, \square)\{\square \leftarrow \{a, b\}\}$
  $= \{f(a,a), f(a,b), f(b,a), f(b,b)\}$

- 言語上の演算
  - 連接: $L \cdot_{\square_i} M = L\{\square_i \to M\}$
  - ベキ: $L^{0,\square_i} = \{\square_i\},\ L^{k+1,\square_i} = L^{k,\square_i} \cup L \cdot_{\square_i} L^{k,\square_i}$
  - 閉包: $L^{*,\square_i} = \bigcup_{k \geq 0} L^{k,\square_i}$
- 例：

$$
\begin{aligned}
&\{a, f(\square, \square)\}^{*,\square} = \\
&\quad \{\square\} \cup \\
&\quad \{a, f(\square, \square)\} \cup \\
&\quad \{f(\square, a), f(\square, f(\square, \square)), \\
&\quad\ f(a, \square), f(a, a), f(a, f(\square, \square)), \\
&\quad\ f(f(\square, \square), \square), f(f(\square, \square), a), f(f(\square, \square), f(\square, \square))\} \cup \\
&\quad \vdots
\end{aligned}
$$

- 正規木表現 E とそれが表す木言語 $[\![E]\!]$:

基底：

- $\emptyset$ は正規木表現で、$[\![\emptyset]\!] = \{\}$

- $a \in \mathcal{F} \cup \mathcal{K}$ は正規木表現で、$[\![a]\!] = \{a\}$

帰納：E, E_i が正規木表現のとき、

- $f \in \mathcal{F}$ のとき、$f(E_1, \ldots, E_n)$ は正規木表現で、

$$[\![f(E_1, \ldots, E_n)]\!] = \{f(t_1, \ldots, t_n) \mid t_i \in [\![E_1]\!]\}$$

- $E_1 + E_2$ は正規木表現で、$[\![E_1 + E_2]\!] = [\![E_1]\!] \cup [\![E_2]\!]$

- $E_1 \cdot_{\square_i} E_2$ は正規木表現で、

$$[\![E_1 \cdot_{\square_i} E_2]\!] = [\![E_1]\!] \cdot_{\square_i} [\![E_2]\!]$$

- $E^{*,\square_i}$ は正規木表現で、$[\![E^{*,\square_i}]\!] = [\![E]\!]^{*,\square_i}$

- 問**5-4:** $\mathcal{F} = \{a, g(), f(,)\}$上の言語を考える

  $L_1 = \{g^k(a) \mid k \geq 0\}$

  $L_2 = \{f(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in L_1\}$

  このとき、$L_1 \cup L_2$を表す正規木表現を書け