AWCBB

- AWCBB (Automata with constraints Between Brothers):
  - AWEDCのうち、どの等値制約も $i = j$, $i \neq j$ ($i, j \in N$) の形式のもの
- 例：
  - $A = (\{q\}, \mathcal{F}, \{q\}, \Delta)$

    $\mathcal{F} = \{f(,), a\}$

    $\Delta = \{a \to q,\ f(q, q) \overset{1=2}{\to} q\}$
  - $L(A)$は、T$(\mathcal{F})$の項で完全二分木なすべての項の集合。
- AWCBBは、和、積、補演算に閉じている

- AWCBBでは空問題が決定可能
- 証明のポイント：
  - 決定的なAWCBBについて考える。$q_1 \neq q_2$のとき次の規則は使用不可能

    $$f(q_1, q_2) \overset{1=2}{\rightarrow} q$$

  - ある状態へ複数個の項から到達できるかを判別する必要がある

    $$a \rightarrow q,\ b \rightarrow q,\ f(q, q) \overset{1\neq 2}{\rightarrow} q'$$

- $M_{\mathcal{F}}$: $\mathcal{F}$の記号の引数の数の最大
- $L(q) \overset{\text{def}}{\iff} \{t \mid t \rightarrow_A^* q\}$

- 補題：決定的なAWCBBの規則$f(q_1, \ldots, q_n) \xrightarrow{c} q$について、

  $|L(q_1)| \geq 1, \ldots, |L(q_n)| \geq 1$,

  $\exists q_i . |L(q_i)| \geq M_{\mathcal{F}}$, かつ

  $\exists t_1 \in L(q_1), \ldots, t_n \in L(q_n).\ f(t_1, \ldots, t_n) \models c$

  ならば、$|L(q)| \geq M_{\mathcal{F}}$

- 略証：cはNNF。$t = f(t_1, \ldots, t_n)$とする

  - tが満たすcの制約$i = j$について、$q_i = q_j$であるから、t_iを$|L(q_i)|$中の他の項に置き換えても満たされる

  - tが満たすcの制約$i \neq j$について、

    $q_i \neq q_j$、$q_i = q_j$のいずれの場合も、t_iを$|L(q_i)|$中の他の項に置き換えても満たされる

- 定理：**AWCBB**の空問題は決定可能
- 略証：決定的な**AWCBB**を用意する。規則の集合をΔとする
  - 各状態pに対して、変数L_pを空集合に初期化し、各L_pが変化しなくなるまで以下を繰り返す。
  - 以下を満たすtについて、$t \notin L_q$かつ、$|L_q| \leq M_{\mathcal{F}}$ のとき $L_q := L_q \cup \{t\}$

    $f(q_1, \ldots, q_n) \xrightarrow{c} q \in \Delta$

    $t_1 \in L_{q_1}, \ldots, t_n \in L_{q_n}$

    $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, $t \models c$
  - すべての受理状態qについて$L_q = \emptyset$ならば受理集合は空と判定される

リダクションオートマトン

- AWEDCのうち以下の条件を満たすもの
  - $Q = \{q_1, \ldots, q_m\}$
  - $f(q_{k_1}, \ldots, q_{k_n}) \xrightarrow{c} q_\ell$について、
    cが等号を含むとき、$\forall i. k_i > \ell$
    そうでないとき、$\forall i. k_i \geq \ell$
- 例： $g(g(t, s), t)$ (s, tは任意) を含む項を受理する決定的かつ完全なリダクションオートマトン

$a \to q_\top,\ g(q_\top, q_\top) \to q_g,\ g(q_\top, q_g) \to q_g,\ g(q_g, q_\top) \xrightarrow{11=2} q_f,$
$g(q_g, q_\top) \xrightarrow{11\neq2} q_g,\ g(q_g, q_g) \xrightarrow{11=2} q_f,\ g(q_g, q_g) \xrightarrow{11\neq2} q_g,$
$g(q, q_f) \to q_f,\ g(q_f, q) \to q_f$ ここで、$q \in \{q_\top, q_g, q_f\}$

リダクションオートマトンの性質

- 和、積演算に閉じている
  補演算については不明**(open problem)**
- 空問題
  - 決定的で完全ならば、決定可能
  - 非決定的ならば、決定不能
- 有限問題**(**$L(A)$は有限集合か？**)** は、決定可能