制約付きNFTA

- **制約付きNFTA**: 遷移規則に適用の際の制約が付けられたNFTA
- **等値制約**: $\pi = \pi'$, $\pi \neq \pi'$ ここで$\pi, \pi' \in N^*$
  - ラベル付き木tに対して、

$$t \models \pi = \pi' \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \pi, \pi' \in \mathsf{Pos}(t) \wedge t|_{\pi} = t|_{\pi'}$$

- **AWEDC (Automata with equality and disequality constraints):**
  - 次の形式の遷移規則を持つNFTA

$$f(q_1, \ldots, q_n) \stackrel{c}{\to} q$$

ここで、cは、等値制約、$\wedge$、$\vee$で構成される式

- **AWEDC** $A = (Q, \mathcal{F}, Q^f, \Delta)$の遷移関係$\rightarrow_A$：
  $f(q_1, \ldots, q_n) \xrightarrow{c} q \in \Delta$，$C[t] \rightarrow_A^* C[f(q_1, \ldots, q_n)]$，
  $t \models c$のとき，

  $$C[t] \rightarrow_A^* C[q]$$

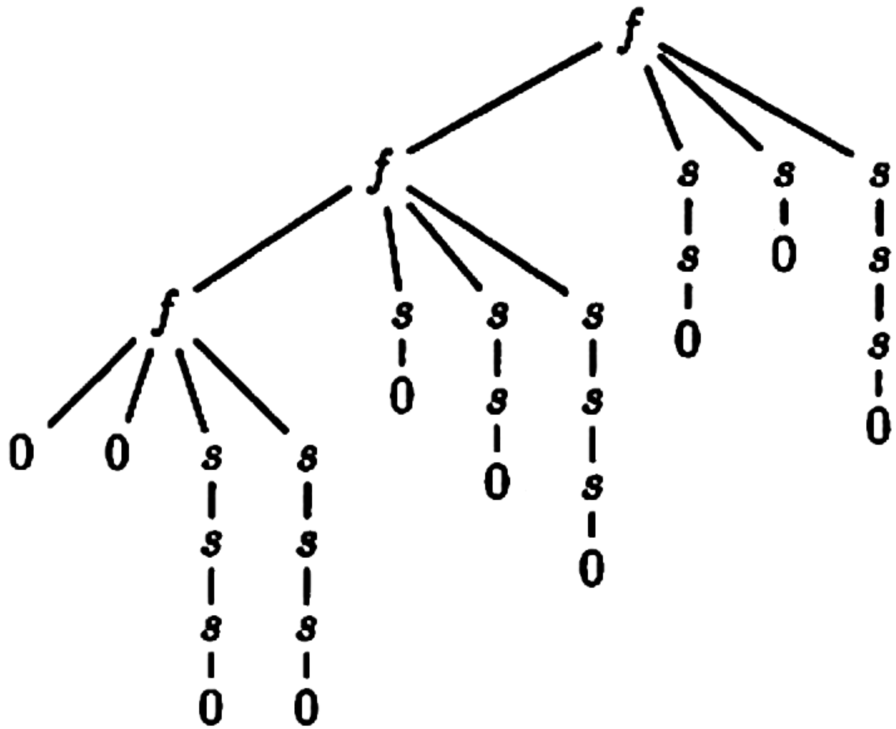
- 例：
  - $A = (\{q\}, \{f(,), a\}, \{q\}, \Delta)$

    $$\Delta = \{a \rightarrow q,\ f(q, q) \xrightarrow{1=2} q\}$$

  - $f(f(a, a), f(a, a))$は受理されるが、$f(a, f(a, a))$ は受理されない

- 例：自然数の和を検証する木を受理するAWEDC
  - $A = (\{q_0.q_n, q_f\}, \{0, s(), f(,)\}, \{q_f\}, \Delta)$

$$0 \to q_0,\quad s(q_0) \to q_n,\quad s(q_n) \to q_n,$$
$$f(q_0, q_0, q_0, q_0) \to q_f$$
$$f(q_0, q_0, q_n, q_n) \xrightarrow{3=4} q_f \quad f(q_0, q_n, q_0, q_n) \xrightarrow{2=4} q_f$$
$$f(q_f, q_n, q_n, q_n) \xrightarrow{14=4 \wedge 21=12 \wedge 131=3} q_f$$



AWEDCの性質

- 完全化：
  - 例：$a \to q,\ f(q,q) \overset{1=2}{\to} q$に対しては、

    $$f(q,q) \overset{1\neq 2}{\to} q_\perp$$

    $$f(q_\perp,q) \to q_\perp \quad f(q,q_\perp) \to q_\perp \quad f(q_\perp,q_\perp) \to q_\perp$$

    を追加すればよい
- 決定化：完全性を保ったまま可能
  - アイデア

    $$a \overset{c_1}{\to} q_1 \quad a \overset{c_2}{\to} q_2$$

    に対して、以下の規則を生成

    $$a \overset{c_1 \wedge c_2}{\to} \{q_1, q_2\} \quad a \overset{c_1 \wedge \neg c_2}{\to} \{q_1\}$$

    $$a \overset{\neg c_1 \wedge c_2}{\to} \{q_2\} \quad a \overset{\neg c_1 \wedge \neg c_2}{\to} \{\}$$

- 決定可能な問題
  - 所属問題: $w \in L(A)$であるか？
- 決定不能な問題
  - 空問題: $L(A) = \emptyset$であるか？

    決定不能として知られている**Post**の対応問題を帰着して証明する

- **Postの対応問題 (PCP, Post Correspondence Problem)**
  - 入力：$P \subseteq \{a,b\}^* \times \{a,b\}^*$
  - Pの解： $w_1 \cdots w_k = w'_1 \cdots w'_k$
    ここで、$k > 0$, $(w_i, w'_i) \in P$
  - **PCP:** 入力のPに解が存在するか？
- 例： $P = \left\{ \begin{pmatrix} abb \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ bb \end{pmatrix} \right\}$

  P の解は $abbbbbb$ ここで、$\begin{pmatrix} abb \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ bb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ bb \end{pmatrix}$

- 空問題の決定不能性の証明
  - $w(t)$：$w = a_1 \cdots a_n$ のとき、$a_1(\cdots a_n(t)\cdots)$ を表す
  - $\mathcal{F} = \{a(), b(), 0, h(,,)\}$ とする
  - 各 $(w, w') \in P$ に対して、

    $w(q_0) \to^* q_w$，$w'(q_0) \to^* q_{w'}$

    となるような **NFTA** をつくる。ただし、q_0 に関する規則は以下のみ許される

    $a(q_0) \to q_a$，$b(q_0) \to q_b$

    例については以下の規則：

    $a(q_0) \to q_a$，$b(q_0) \to q_b$，

    $b(q_b) \to q_{bb}$，$a(q_{bb}) \to q_{abb}$

- 空問題の決定不能性の証明(続き)
  - 状態q, q_fを加え、以下のように規則をつくる

    $0 \to q_0$，$h(q_0, q_0, q_0) \to q$

    それぞれの$(w, w') \in P$に対して

    $a(q_w) \to q_a$，$b(q_w) \to q_b$，$a(q_{w'}) \to q_a$，$b(q_{w'}) \to q_b$，

    $h(q_w, q, q_{w'}) \xrightarrow{11^{|w|}=21 \wedge 31^{|w'|}=23} q$

    $h(q_w, q, q_{w'}) \xrightarrow{11^{|w|}=21 \wedge 31^{|w'|}=23 \wedge 1=3} q_f$

    $(b, bb) \in P$については以下の規則：

    $a(q_b) \to q_a$，$b(q_b) \to q_b$，$a(q_{bb}) \to q_a$，$b(q_{bb}) \to q_b$，

    $h(q_b, q, q_{bb}) \xrightarrow{11=21 \wedge 311=23} q$

    $h(q_b, q, q_{bb}) \xrightarrow{11=21 \wedge 311=23 \wedge 1=3} q_f$

- 空問題の決定不能性の証明(続き)