Gauss の和を計算してみよう
課題のヒント

鈴木浩志

2011.5.6.

次頁以降には、課題 1, 3 のヒントというか解決方法の例があからさまに書いてあるので、自分で考えたい人は見てしまうと悲しい気持ちになるかもです。ヒントだけ必要な場合は、次頁以降は見ないようにしましょう。

ヒント

課題 1. 平方根と言うと Pythagoras の定理とか思い出すのですが、例えば有理数 x, y で $x^2 + y^2 = 3$ となるものは存在しないなど、$x^2 + y^2$ で狙った数を作るのはうまくいかなかったりするので、一工夫必要です。

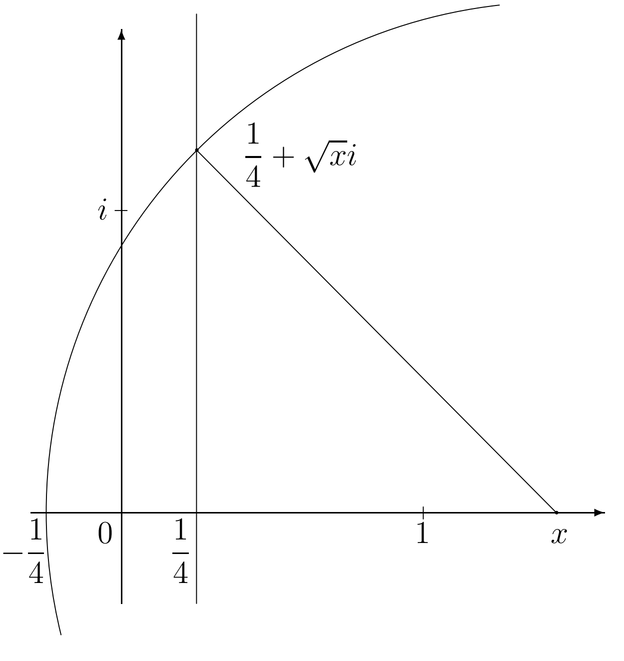
課題 3. 直線などのグラフを少し変わった紙に描いた記憶がないか思い出してみましょう。

1　課題 1.

複素平面上に、正の実数 x が与えられた時、$\sqrt{x}$ を描ければよい。例えば、x を中心として $-\frac{1}{4}$ を通る円と、$\frac{1}{4}$ を通り虚軸と平行な直線の交点を取ると、底辺の長さが $\left|x-\frac{1}{4}\right|$、斜辺の長さが $x+\frac{1}{4}$ の直角三角形ができる。高さは、

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\left|x-\frac{1}{4}\right|^2}=\sqrt{x}$$

である。



2　課題 3.

長さ 1 が、定規の長さの半分以下で、コンパスが届く様に $0, 1$ をとっておく。0 はすでにある点を使うと若干手間が少なくなる。

これで少なくとも、距離が 2 以下の 2 点間の中点や、長さが 2 未満の線分の垂直 2 等分線が描ける。-1 を描いた後、$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ を描き、垂直 2 等分線で、虚軸が描ける。同様の作業を繰り返すと 1 辺の長さが 1 の方眼紙を描くことができる。0 以外の問題の点のひとつを $z = x + yi$ とする。z を内部か周上に含む正方形のひとつ S をとると、頂点のうちひとつは、実部も虚部も偶数である。これを $z_0 = 2m + 2ni$ とする。$z - z_0 = a + bi$ とおくと、$a = x - 2m, b = y - 2n$ の絶対値はともに 1 以下である。S の頂点と z の距離のうち 2 つは 1 以下であるから、$-m - ni$ 平行移動した正方形 S' 内の同じ位置関係の点として $z - (m + ni) = (m + a) + (n + b)i$ を描くことができる。$z - (m + ni)$ と $m + ni$ の距離は、同じ正方形 S' 内なので $\sqrt{2}$ 以下であり、中点 $\frac{(z - (m + ni)) + (m + ni)}{2} = \frac{1}{2}z$ を描くことができる。これは、0 と z の中点である。これを問題に出て来る各点で行うと、0 を中心として問題図を $\frac{1}{2}$ 倍に縮めたものが出来上がる。何回か行えばコンパスや定規が届くようになって、解答の縮図が出来上がる。できた点を、0 を中心として整数倍に拡大することはすぐできるので、定規が届かない 2 点間を結んだ直線の途中の点をいくらでも描くことができる。定規が届かない点を結んだ直線とコンパスが届かない円の交点も描くことができる。実際に行う時は誤差が出るので、倍率が大きいほど精密さが要求される。$m = 2, n = 1, a, b < 0$ の場合に $\frac{1}{2}z$ を描くと下の図のようになる。