正 17 角形描画手順の例

鈴木浩志

平成 24 年 3 月 22 日

平方根の作図はヒントに書いた方法を使うことにして、

$$
\begin{aligned}
& 2\cos\frac{2\pi}{17} = \zeta_{17} + \zeta_{17}^{-1} \\
= \quad & \frac{\sqrt{17}-1}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17+3\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}} - \sqrt{\frac{17+\sqrt{17}}{2}}} \\
= \quad & -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{17}}{8} + \sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{32}} + \sqrt{\frac{17}{16} + \frac{3\sqrt{17}}{16} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{32}} - \sqrt{\frac{17+\sqrt{17}}{32}}}
\end{aligned}
$$

を作図します。3 行目の表し方にすると、

$$
\frac{17-\sqrt{17}}{32} = 0.402402949\ldots, \quad \frac{17+\sqrt{17}}{32} = 0.660097050\ldots,
$$

$$
\frac{17}{16} + \frac{3\sqrt{17}}{16} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{32}} - \sqrt{\frac{17+\sqrt{17}}{32}} = 0.705942543\ldots
$$

なので、平方根を作図するとき、コンパスの半径が 1 未満ですみます。

次ページから描画手順ですが、説明が煩雑になるので、線分の垂直 2 等分線や、2 点間の中点、角の 2 等分を繰り返して角を 4 等分や 16 等分する手順は省略してあります。また、平方根を使って表した式をそのまま描いているため、作業回数が多めで、その分誤差が大きくなりやすくなっています。きれいに描きたい場合は、作業回数を減らす工夫が必要でしょう。

手順 0.　基準となる距離 1 の 2 点 0 と 1 を用意する。コンパスで距離 $\frac{17}{16}$ が届き、定規で距離 2 が届く長さで、横は -1 から 2 まで、縦は $-i$ から i までが紙の中に収まるようになるべく大きくとる。(手順 19 の後の注意に従って、最終段階で ζ_{17}^4 を描く場合、横は -1 から $\frac{17}{16}$ まででよい。)

手順 1.　0 と 1 を結んで実軸を描く。右は 2、左は -1 まで伸ばしておく。(ζ_{17}^4 を描く場合、右は $\frac{17}{16}$ まででよい。)

手順 2.　0 を中心とする半径 1 の円を描いて、-1 をとる。

手順 3.　0 と 1 を結んだ線分の垂直 2 等分線を、$\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}+\frac{i}{8}$ を含むように描く。

手順 4.　0 を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円を描いて、$-\frac{1}{2}$ をとる。

手順 5.　$-\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}$ の垂直 2 等分線として、虚軸を $\frac{i}{4}$ を含むように描く。

手順 6.　0 と $\frac{1}{2}$ を結んだ線分の垂直 2 等分線を、$\frac{1}{4}-i$ と $\frac{1}{4}+i$ を含むように描く。

手順 7.　0 を中心とする半径 $\frac{1}{4}$ の円を描き、$-\frac{1}{4}, \frac{i}{4}$ をとる。

手順 8.　0 と $\frac{1}{4}$ を結んだ線分の垂直 2 等分線を、$\frac{1}{8}$ と $\frac{1}{8}+\frac{i}{4}$ を含むように描く。

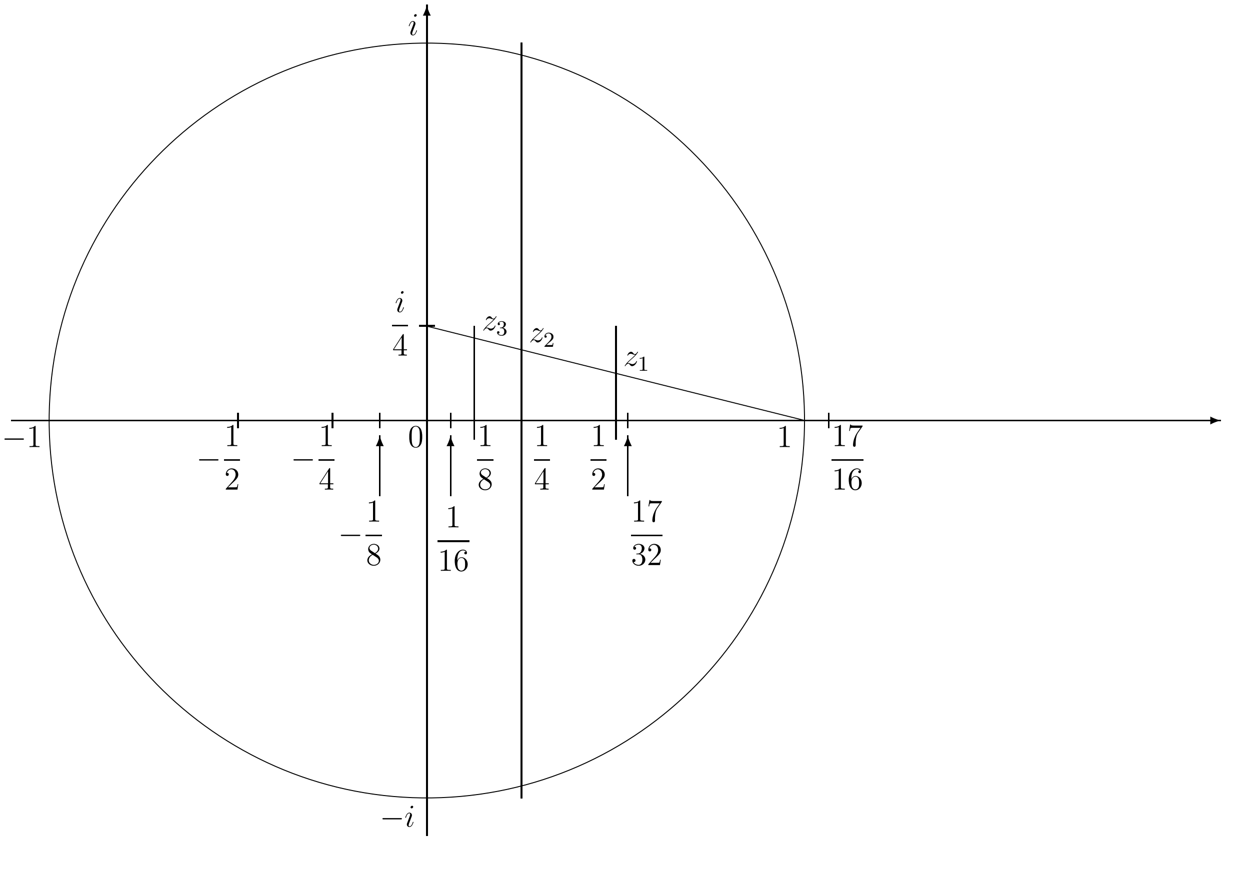
手順 9.　0 を中心とする半径 $\frac{1}{8}$ の円を描き、$-\frac{1}{8}$ をとる。

手順 10.　0 と $\frac{1}{8}$ の中点 $\frac{1}{16}$ を描く。

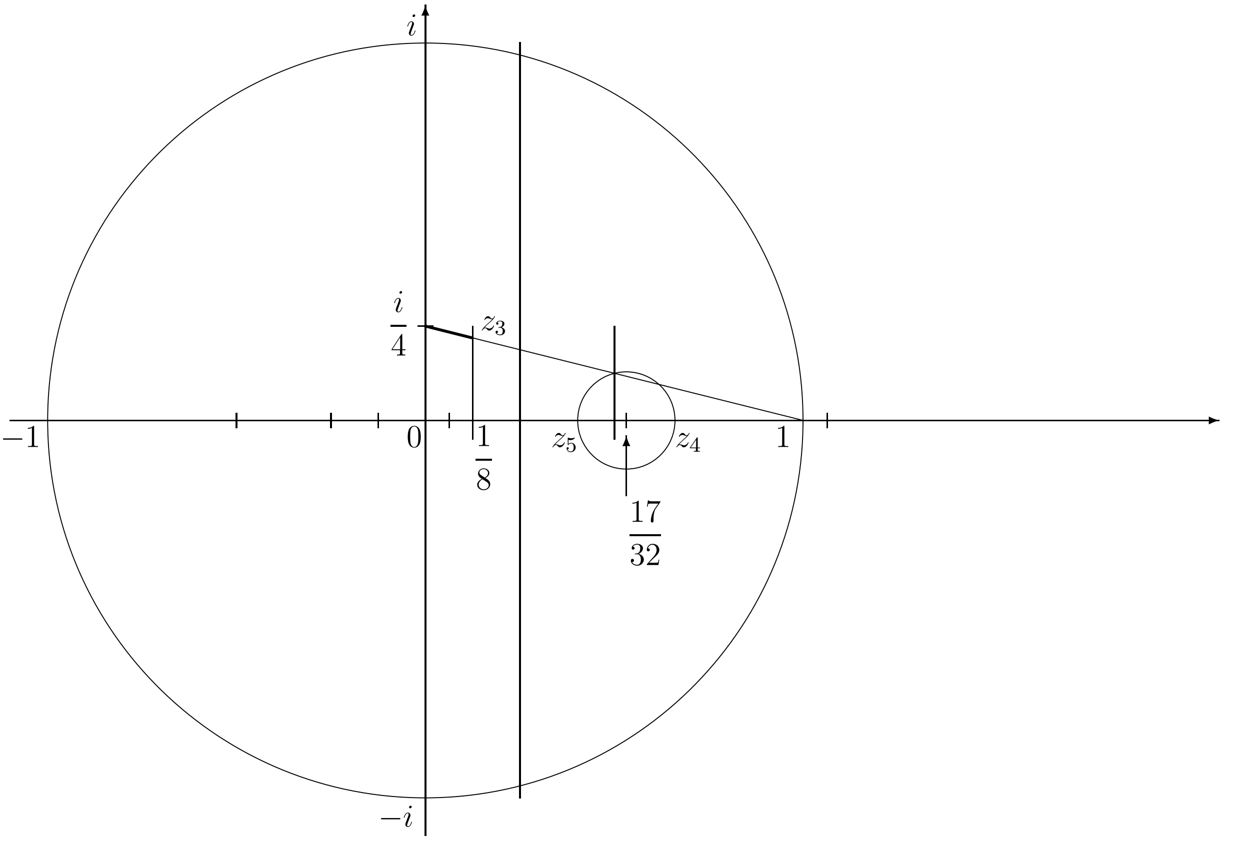
手順 11.　-1 と $\frac{1}{16}$ の距離 $\frac{17}{16}$ をコンパスでとって、$\frac{17}{16}$ を描く。($\frac{1}{16}$ をコンパスでとって $\frac{17}{16}$ を描いても同じですが、事務室で借りたコンパスは、短い長さもとりにくかったのでこうしてみました。)

手順 12.　0 と $\frac{17}{16}$ の中点 $\frac{17}{32}$ を描く。

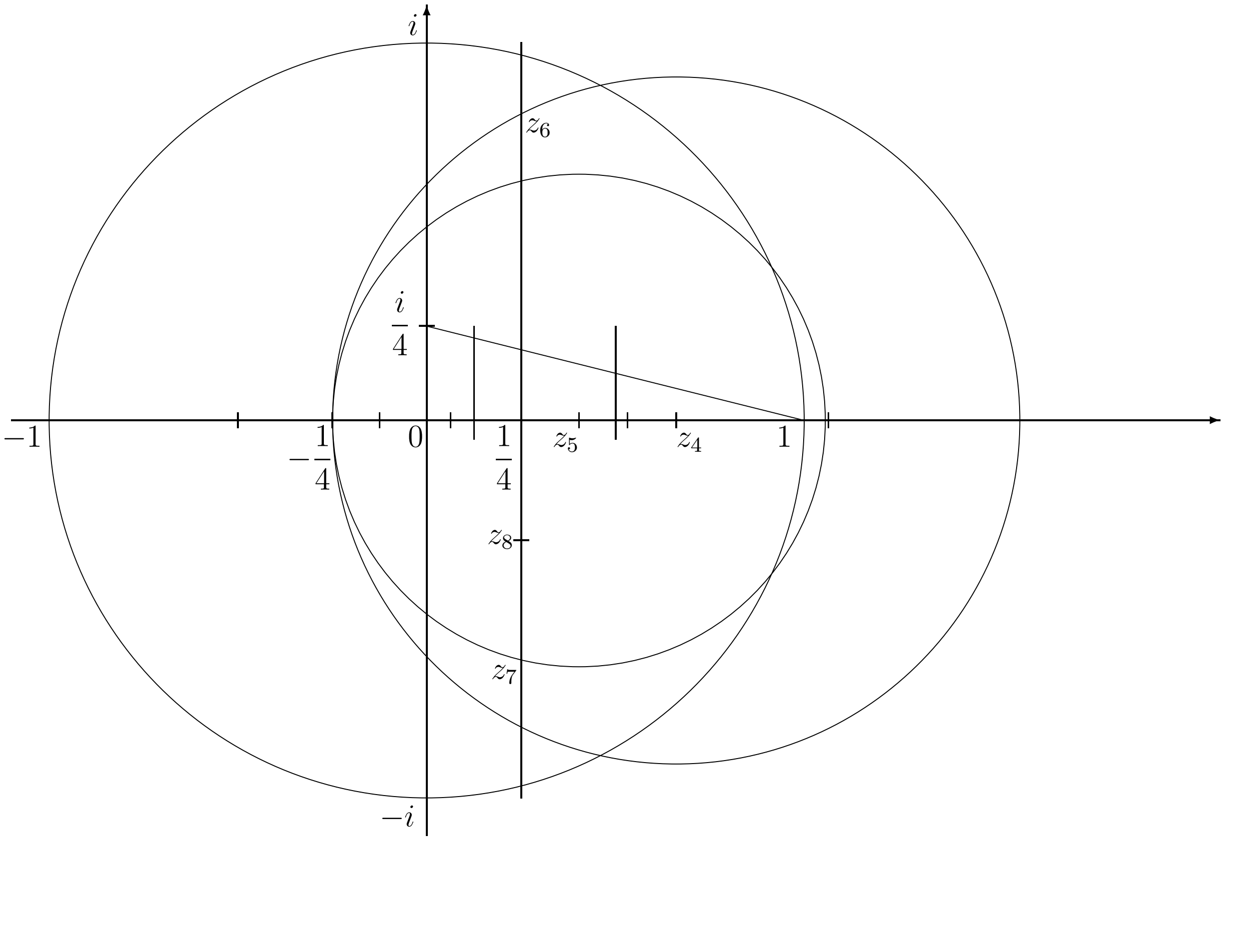
手順 13. $\dfrac{i}{4}$ と 1 を結んだ線分を描き、既に描かれている $\dfrac{1}{2}$ を通って虚軸と平行な直線との交点を z_1、$\dfrac{1}{4}$ を通って虚軸と平行な直線との交点を z_2、$\dfrac{1}{8}$ を通って虚軸と平行な直線との交点を z_3 とする。1 と $\dfrac{i}{4}$ の距離が $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$ なので、z_1 と 1、z_2 と 1、z_3 と $\dfrac{i}{4}$ の距離はそれぞれ、$|z_1 - 1| = \dfrac{\sqrt{17}}{8}$, $|z_2 - 1| = \dfrac{3\sqrt{17}}{16}$, $|z_3 - \dfrac{i}{4}| = \dfrac{\sqrt{17}}{32}$ である。ここまで描くと、下の図になる。



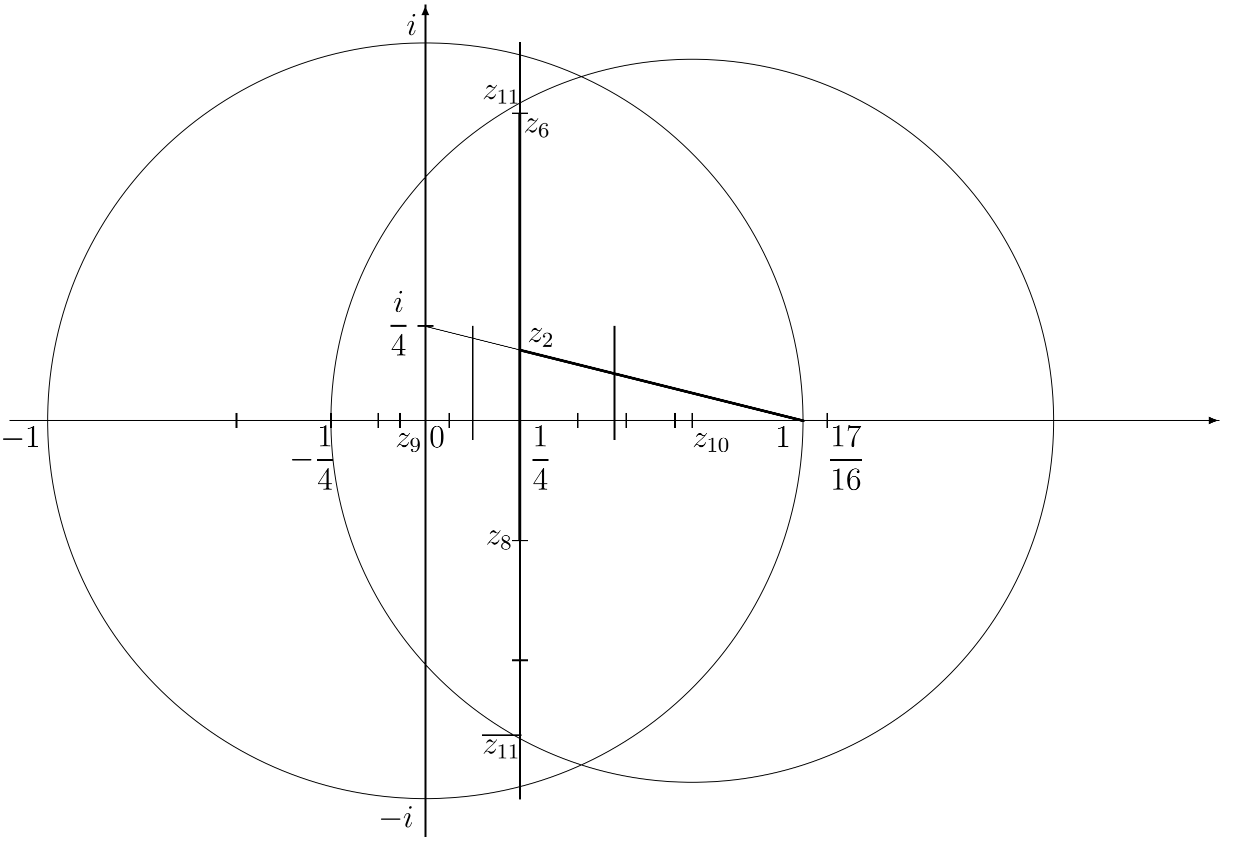
手順 14. z_3 と $\dfrac{i}{4}$ の距離 $|z_3 - \dfrac{i}{4}| = \dfrac{\sqrt{17}}{32}$ をコンパスでとり、$\dfrac{17}{32}$ を中心とする半径 $|z_3 - \dfrac{i}{4}|$ の円を描いて、実軸との交点 $z_4 = \dfrac{17+\sqrt{17}}{32}$, $z_5 = \dfrac{17-\sqrt{17}}{32}$ をとると下の図になる。



手順 15.　z_4 を中心として $-\dfrac{1}{4}$ を通る円を描き、$\dfrac{1}{4}$ を通り虚軸と平行な直線との交点の内、実軸より上にあるものを z_6 とする。z_5 を中心として $-\dfrac{1}{4}$ を通る円を描き、$\dfrac{1}{4}$ を通り虚軸と平行な直線との交点の内、実軸より下にあるものを z_7 とする。z_7 と $\dfrac{1}{4}$ の中点を z_8 とする。ヒントで述べたように、z_6, z_7, z_8 と $\dfrac{1}{4}$ の距離は、それぞれ $|z_6-\dfrac{1}{4}|=\sqrt{\dfrac{17+\sqrt{17}}{32}}$, $|z_7-\dfrac{1}{4}|=\sqrt{\dfrac{17-\sqrt{17}}{32}}$, $|z_8-\dfrac{1}{4}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{17-\sqrt{17}}{32}}$ であるから、z_6 と z_8 の距離は $|z_6-z_8|=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{17-\sqrt{17}}{32}}+\sqrt{\dfrac{17+\sqrt{17}}{32}}$ である。

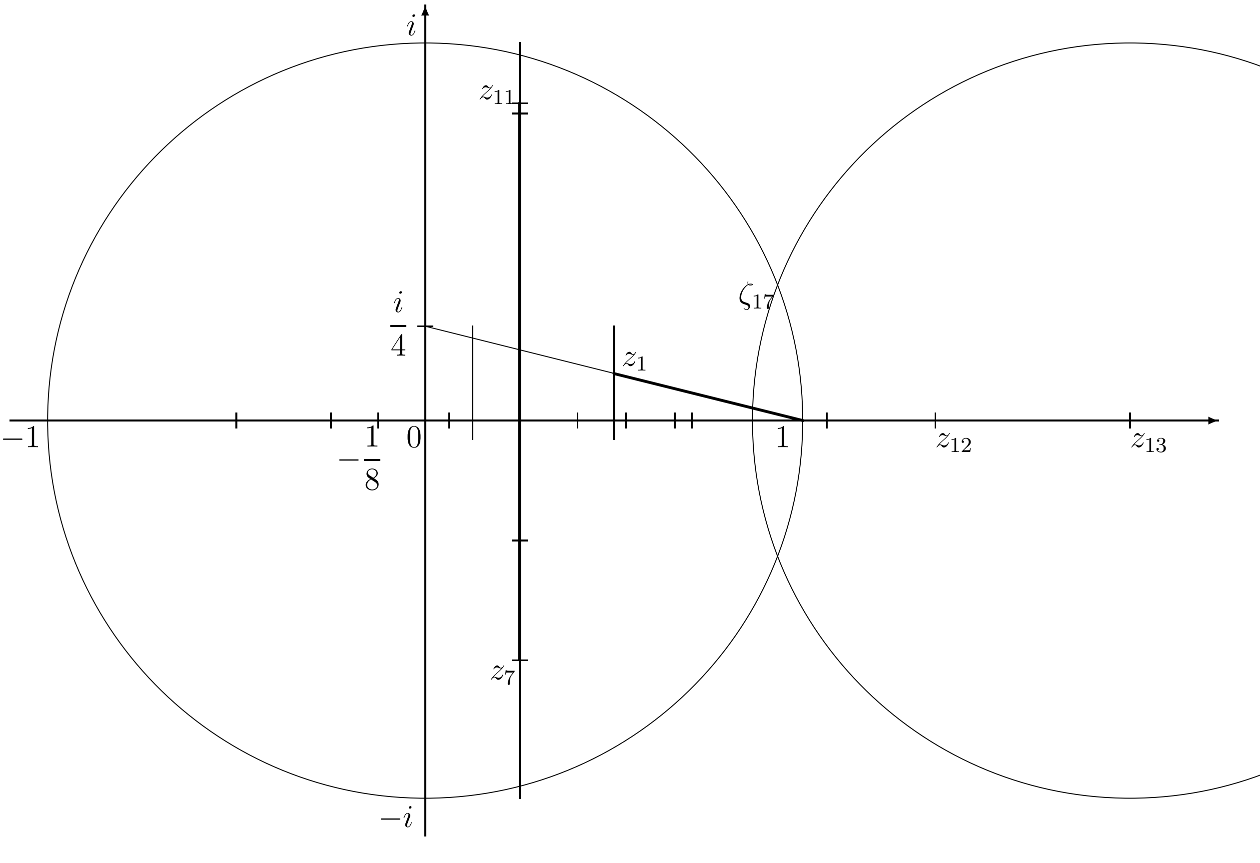


手順 16.　z_6 と z_8 の距離をコンパスでとり、$\dfrac{17}{16}$ から実軸上を左へ $|z_6-z_8|$ 移動した点 z_9 を描く。(コンパスが届かない場合は、z_6, z_8 と $\dfrac{1}{4}$ の距離に分割して描いてください。) さらに、z_2 と 1 の距離をコンパスでとり、z_9 から実軸上を右へ $|z_2-1|$ 移動した点 $z_{10}=\dfrac{17}{16}-|z_6-z_8|+|z_2-1|$ をとる。$z_{10}=\dfrac{17}{16}+\dfrac{3\sqrt{17}}{16}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{17-\sqrt{17}}{32}}-\sqrt{\dfrac{17+\sqrt{17}}{32}}$ である。z_{10} を中心として $-\dfrac{1}{4}$ を通る円を描き、$\dfrac{1}{4}$ を通り虚軸と平行な直線との交点の内、実軸より上にあるものを z_{11} とする。下にあるものは $\overline{z_{11}}$ である。z_{11} と $\dfrac{1}{4}$ の距離は、$|z_{11}-\dfrac{1}{4}|=\sqrt{\dfrac{17}{16}+\dfrac{3\sqrt{17}}{16}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{17-\sqrt{17}}{32}}-\sqrt{\dfrac{17+\sqrt{17}}{32}}}$ であることがヒントによりわかる。



手順 17. z_{11} と z_7 の距離 $|z_{11}-z_7|$ をコンパスでとり、$-\dfrac{1}{8}$ から実軸上を右へ $|z_{11}-z_7|$ 移動した点を z_{12} とする。(コンパスが届かない場合は z_{11}, z_7 と $\dfrac{1}{4}$ の距離に分割してください。) さらに、z_1 と 1 の距離 $|z_1-1|$ をコンパスでとり、z_{12} から実軸上を右へ $|z_1-1|$ 移動した点、$z_{13}=-\dfrac{1}{8}+|z_1-1|+|z_{11}-z_7|$ をとる。$z_{13}=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{\sqrt{17}}{8}+\sqrt{\dfrac{17-\sqrt{17}}{32}}+\sqrt{\dfrac{17}{16}+\dfrac{3\sqrt{17}}{16}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{17-\sqrt{17}}{32}}-\sqrt{\dfrac{17+\sqrt{17}}{32}}}=2\cos\dfrac{2\pi}{17}$ である。

手順 18. z_{13} を中心とする半径 1 の円を描くと、0 を中心とする半径 1 の円との交点の内、実軸より上にあるものが ζ_{17} である。



手順 19. ζ_{17} と 0 を結んだ線分が実軸の正の部分となす角が $\dfrac{2\pi}{17}$ なので、残った中心角 $\dfrac{32}{17}\pi$ を 16 等分すると正 17 角形の残りの頂点が描ける。ζ_{17} の作図は作業回数が多いので誤差が出やすいが、$\zeta_{17}^{16} = \zeta_{17}^{-1}$ が ζ_{17} と実軸に関して線対称な位置にあればうまく描けたことになる。(残りの頂点を描くとき、1 と ζ_{17} の距離 $|1-\zeta_{17}|$ を使って、$\zeta_{17}^2, \zeta_{17}^3, \ldots$ と円をまわりながら順にとっていくこともできますが、1 周したとき、最初にとった距離の誤差が ζ_{17}^{-1} のところで 16 倍になる危険があるので注意が必要です。)

注意　上でも述べたが、この作図手順は作業回数が多いので、$\cos\dfrac{2\pi}{17}$ の誤差が大きくなることがある。ζ_{17} の近くは、円の傾きの絶対値が大きいので、$\cos\dfrac{2\pi}{17}$ を描いた時の誤差に対して、中心角の誤差が大きくなる危険がある。状況によるので一概にはいないが、その場合、手順 18 で $2\cos\dfrac{2\pi}{17}$ を描く代わりに、次の 手順 20 で 3 重根号の前の符号をマイナスに変えた

$$
\begin{aligned}
&2\cos\frac{8\pi}{17} = \zeta_{17}^4 + \zeta_{17}^{-4} \\
= \quad & \frac{\sqrt{17}-1}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17+3\sqrt{17}}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{2}} - \sqrt{\frac{17+\sqrt{17}}{2}}} \\
= \quad & \frac{\sqrt{17}-1}{8} + \sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{32}} - \sqrt{\frac{17+3\sqrt{17}}{16} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{32}} - \sqrt{\frac{17+\sqrt{17}}{32}}}
\end{aligned}
$$

を描いたほうが誤差が小さくなる可能性がある。

手順 20. z_7 と $\overline{z_{11}}$ の距離 $|z_7 - \overline{z_{11}}|$ をコンパスでとり、$-\dfrac{1}{8}$ から実軸上を左へ $|z_{11} - z_7|$ 移動した点を z_{14} とする。さらに、z_1 と 1 の距離 $|z_1 - 1|$ をコンパスでとり、z_{14} から実軸上を右へ $|z_1 - 1|$ 移動した点、$z_{15} = -\dfrac{1}{8} + |z_1 - 1| + |z_{11} - z_7|$ をとる。$z_{15} = -\dfrac{1}{8} + \dfrac{\sqrt{17}}{8} + \sqrt{\dfrac{17-\sqrt{17}}{32}} - \sqrt{\dfrac{17}{16} + \dfrac{3\sqrt{17}}{16} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{17-\sqrt{17}}{32}} - \sqrt{\dfrac{17+\sqrt{17}}{32}}} = 2\cos\dfrac{8\pi}{17}$ である。0 と z_{15} を結んだ線分の垂直 2 等分線が、0 を中心とする半径 1 の円と交わる点の内、実軸より上にあるものが ζ_{17}^4 である。ζ_{17}^4 と 0 を結んだ線分と、実軸の正の部分のなす角を 4 等分すると ζ_{17} が描ける。あとは手順 19 で正 17 角形が完成する。