名古屋大学

2010年11月08日(月) 13:00-14:30 S2Y

平成22年度 エV系(社会環境工学科) 第5回 電磁気学Ｉ
天野 浩

項目

電界と電束密度、ガウスの発散定理とガウスの法則の積分形と微分形

＊ファラデーの電気力線の使い方をマスターします。
＊電界と電束密度を定義します。
＊ガウスの発散定理を用いて、ガウスの法則の積分形から微分形を導出します。
＊ガウスの法則を用いて、様々な問題を解析します。

ファラデーと電気力線

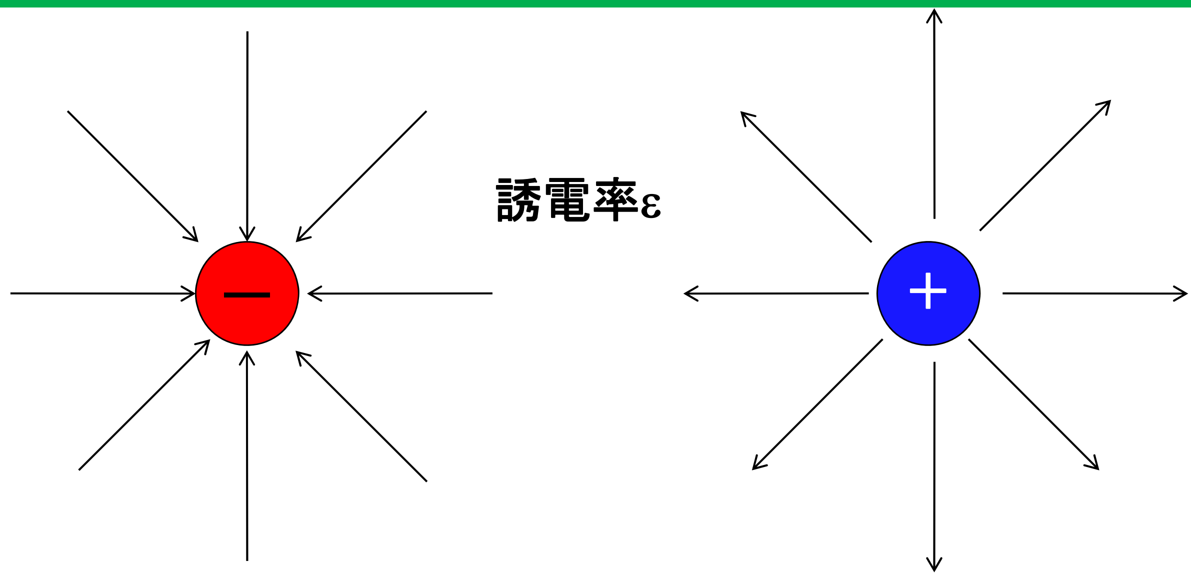
電気力線の性質

1. 電気力線の各点での接線はその点での電界の向き。
2. 電気力線の始点は正電荷，終点は負電荷，または無限遠。
3. 電気力線の本数の密度（本/m^2）は電界の強さ｜E｜に比例する。
4. 正電荷q からは（q /ε）本の電気力線が発生する。(εは誘電率。)
5. ある閉曲面の表面を通過する電気力線の本数は、その閉曲面の内側に含まれる電気量に比例する。
6. 電荷のないところで途切れたり二つ以上の電気力線が交わることはない。

Michael Faraday, 1791-1867、UK

ウィキペディアより

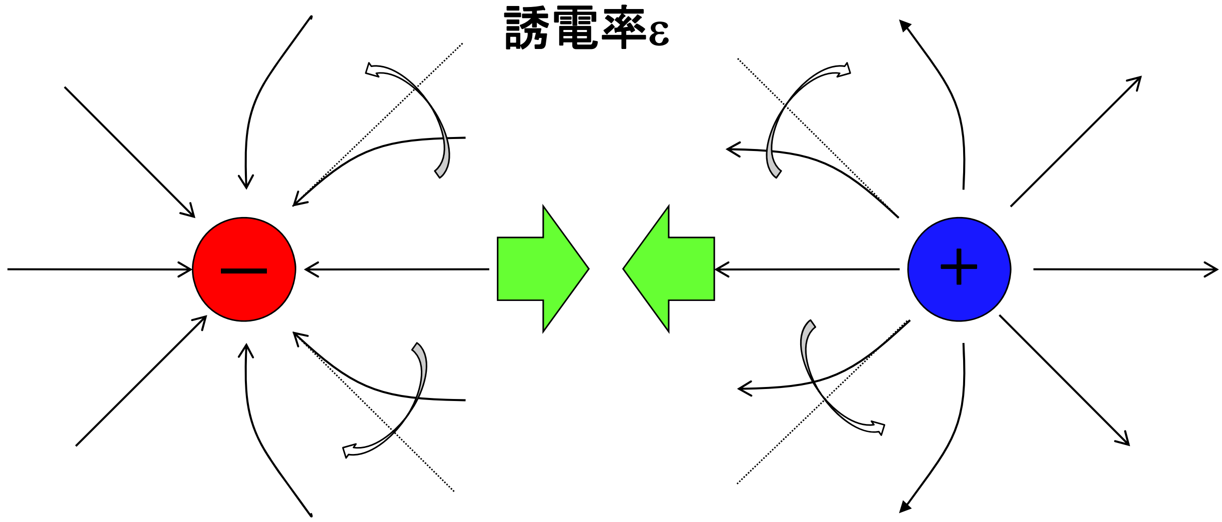
ファラディの電気力線



＊電荷Q から，$\dfrac{Q}{\varepsilon}$ 本の電気力線が出ると考える。

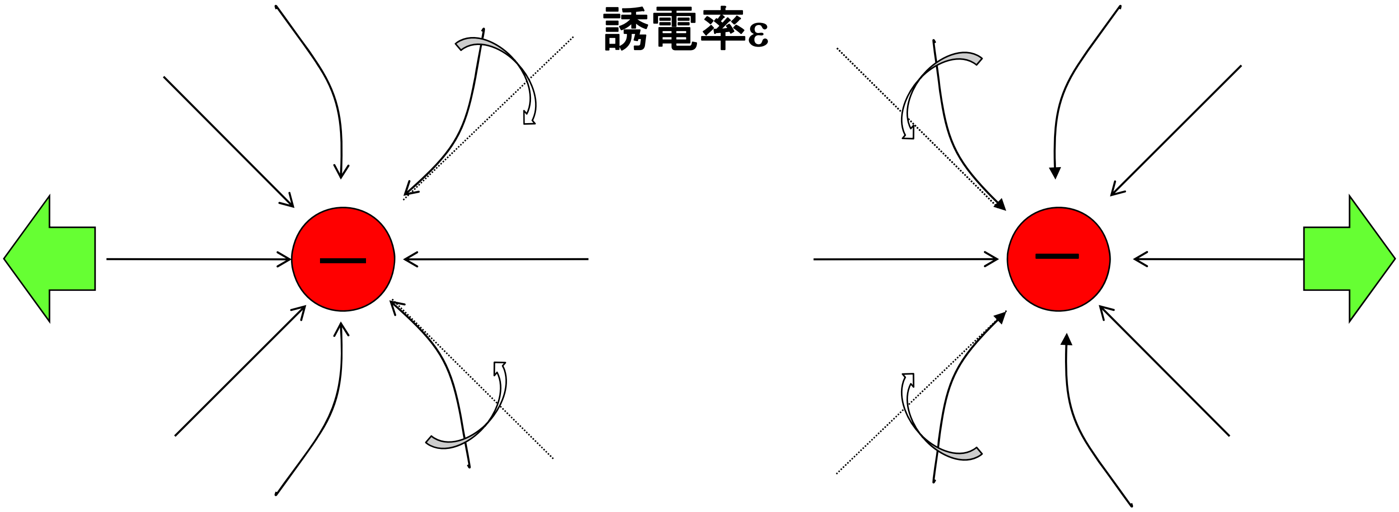
＊プラスの電荷から電気力線が出て，マイナスの電荷は電気力線を吸い込む。

ファラディの電気力線



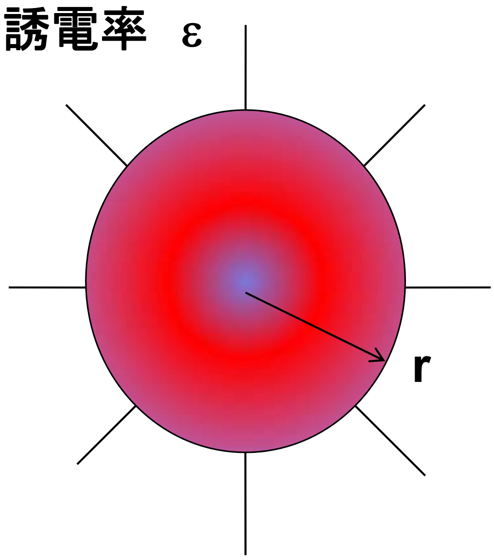
＊異種電荷では，電気力線をもとに戻そうという<u>引力</u>が発生する。

ファラディの電気力線



＊同種電荷では，電気力線をもとに戻そうという斥力が発生する。

ファラディの電気力線

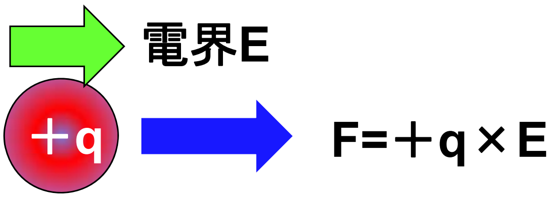


電荷Qを中心とした半径rの球の表面の電気力線の本数の密度は

$$\frac{Q}{\varepsilon}\frac{1}{4\pi r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$$

半径rの球の表面積は$4\pi r^2$であることを思い出そう！

電気力線のある場=電界



+qの電荷にF[N]=q[C]×Eという力が働く場を電界Eと定義する。

従って、電界の単位：[N/C]

電荷Qが距離rの位置に作る電界の大きさEは

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{|Q|}{r^2}[N/C = V/m]$$

こちらの単位の方がよく使われる。

誘電率と電界ベクトルと電束密度ベクトル

<u>誘電率と比誘電率</u>

＊誘電率ε [F/m] は電荷の溜め易さを表す。

＊比誘電率ε_rとは、その材料の誘電率の真空の誘電率ε_0 [F/m] に対する割合。

$$\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$$

＊ε_0 = 8.85418782×10^{-12} F/m

光速cと真空の誘電率透磁率

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

<u>電束密度　(電気力線の束の密度という意味。)</u>

＊電気力線を「何本か」を束ねたもの。

＊1[C]の電荷からは1本の電束が放射されていると定義。

→q[C]の電荷からはq本の電束が放射されている。

＊電束密度D [C/㎡] とは、単位面積あたりの電気力線の本数ということになり、電界との関係を式で書くと、

<u>＊電束密度と電界の関係</u> $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

ガウスの法則 (1837)・・・電荷と電界の関係を表した式

積分形

$$\oiint_S \varepsilon\vec{E}\cdot d\vec{S} = \sum_k Q_k, \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_k Q_k$$

$$\oiint_S \varepsilon\vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV, \oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

ある閉曲面領域内に電荷が存在すると、その領域から電荷と等しい電束が出入りする。

Johann Carl Friedrich Gauß、1777-1855、Germany

ウィキペディアより

微分形

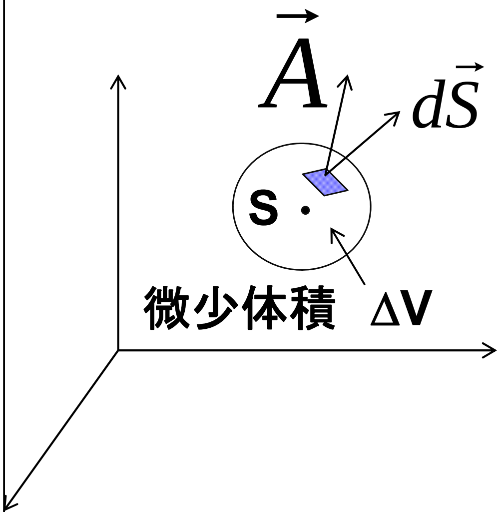
$$\nabla\cdot\left(\varepsilon\vec{E}\right) = \rho, \nabla\cdot\vec{D} = \rho$$

ρ:ローと読む。(rのギリシャ文字)

E:電界、D:電束密度、ρ:電荷密度、Q:電荷、ε:誘電率

ガウスの発散定理を使って積分形を微分形にする。

ベクトルの発散とは？第3回講義ノート参照



$$div\vec{A}(r) = \nabla\cdot\vec{A}(r) = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_S \vec{A}(r)\cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

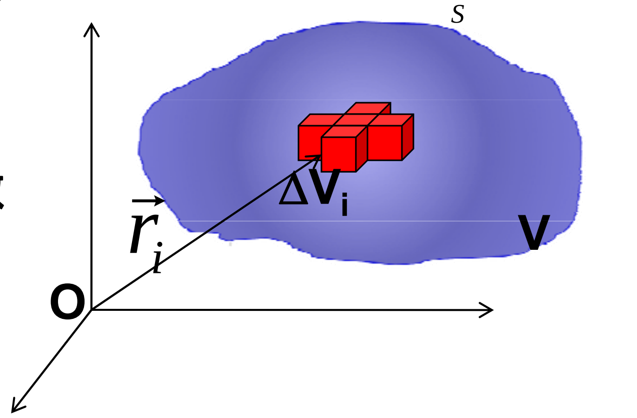
流束密度ベクトル$\vec{A}(r)$を持つ流れの、微小体積ΔVの表面Sを通して外に向かう全流束をΔVで割ったものの極限。

ガウスの発散定理を使って積分形を微分形にする。

$$div\vec{A}(r) = \nabla\cdot\vec{A}(r) = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint_S \vec{A}(r)\cdot d\vec{S}}{\Delta V}$$

ΔVが十分小さい時、

$$\nabla\cdot\vec{A}(r) \approx \frac{\oiint_S \vec{A}(r)\cdot d\vec{S}}{\Delta V} \Rightarrow \nabla\cdot\vec{A}(r)\times\Delta V \approx \oiint_S \vec{A}(r)\cdot d\vec{S}$$



＊左図の様に、任意の大きさの体積Vに対して、それをn個の微小領域$\Delta V_1, \Delta V_2$,･･･に分けると、それぞれの微小領域で上の式が成り立つので、すべて加えると

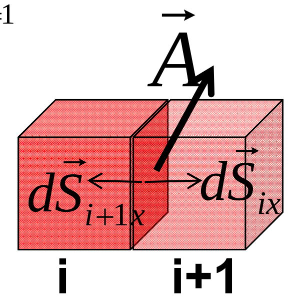
$$\sum_{i=1}^{n}\nabla\cdot\vec{A}(r_i)\times\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n}\oiint_{S_i}\vec{A}(r)\cdot d\vec{S}$$

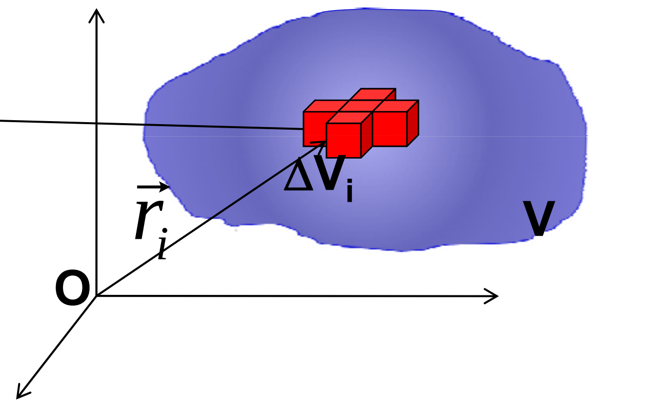
i番目の微小領域ΔV_iの全表面

ガウスの発散定理を使って積分形を微分形にする。

＊dSは各微小領域ごとに外向きにとる。

$$\sum_{i=1}^{n}\nabla\cdot\vec{A}(r_i)\times\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n}\oiint_{S_i}\vec{A}(r)\cdot d\vec{S}$$





＊右辺の和に関して、隣接するΔViの境界面の寄与はA(r)が同じなのでdSが逆向きとなり打ち消しあう。
→もとの体積Vの外表面の寄与のみが残る。

$$\sum_{i=1}^{n}\nabla\cdot\vec{A}(r_i)\times\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n}\oiint_{S_i}\vec{A}(r)\cdot d\vec{S}$$

ガウスの発散定理

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}(r)dV = \oiint_S \vec{A}(r)\cdot d\vec{S}$$

ガウスの発散定理を使って積分形を微分形にする。

ガウスの発散定理

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{A}(r)dV = \oint\!\!\oint_S \vec{A}(r)\cdot d\vec{S}$$

ガウスの法則の積分形

$$\oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{D}dV = \oint\!\!\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

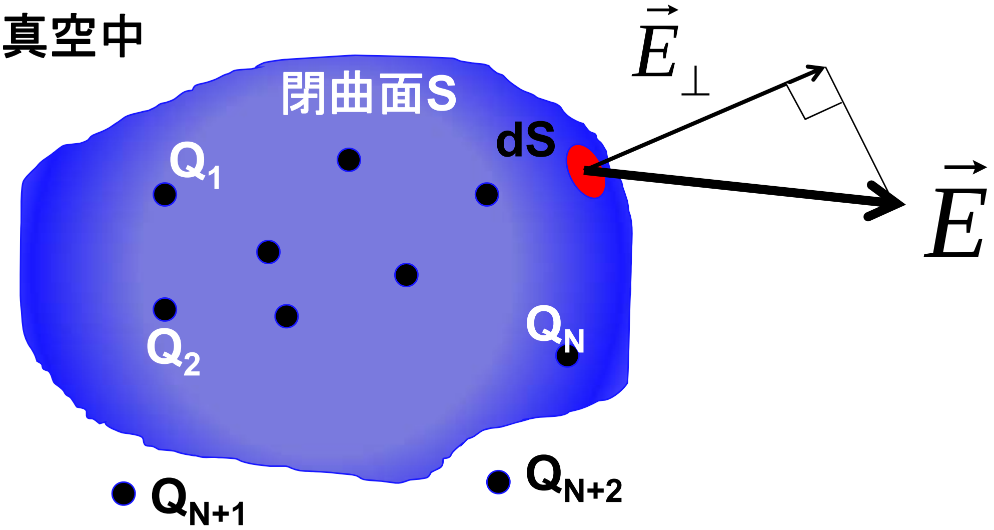
ガウスの法則の微分形

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{D} = \rho}$$

任意の点について成り立つ。

外の電荷と中の電荷とガウスの法則

真空中



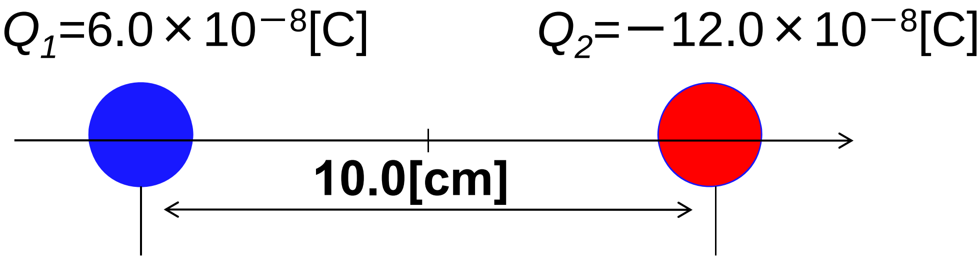
$$\vec{E}_\perp = \vec{E}_{1\perp} + \vec{E}_{2\perp} + \cdots + \vec{E}_{N\perp}$$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}_{i\perp}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$ **より**

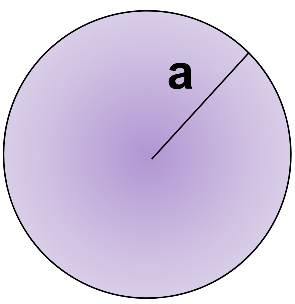
$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}_\perp\cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

最重要！
閉曲面の外側の電荷は、右辺に含まれない！

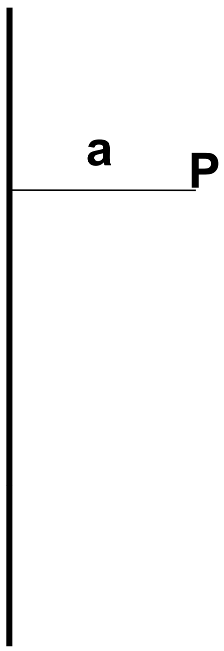
Q5-1 図に示すように、$Q_1=6.0\times10^{-8}$[C]、$Q_2=-12.0\times10^{-8}$[C]の二つの電荷が10.0[cm]離れて置かれている時、二つの点電荷の中点の電界の向きと大きさを求めなさい。



Q5-2 真空中に誘電率εで，内部に一様に総電荷qが広がっている半径aの球の内部および外部の電界を求めなさい。



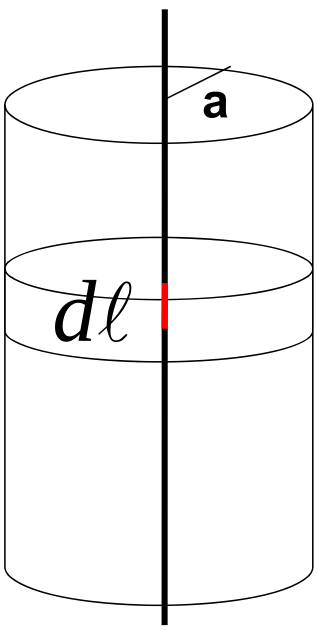
Q5-3　無限の長さの導線に単位長さ当たりq[C/m]の電荷が与えられている時，　この導線から垂直距離a[m]だけ離れている地点Pでの電界の方向および大きさを求めなさい。



Q5-3　無限の長さの導線に単位長さ当たりq[C/m]の電荷が与えられている時，　この導線から垂直距離a[m]だけ離れている地点Pでの電界の方向および大きさを求めなさい。

Q5-3　無限の長さの導線に単位長さ当たりq[C/m]の電荷が与えられている時，　この導線から垂直距離a[m]だけ離れている地点Pでの電界の方向および大きさを求めなさい。

Q5-3　無限の長さの導線に単位長さ当たりq[C/m]の電荷が与えられている時，　この導線から垂直距離a[m]だけ離れている地点Pでの電界の方向および大きさを求めなさい。

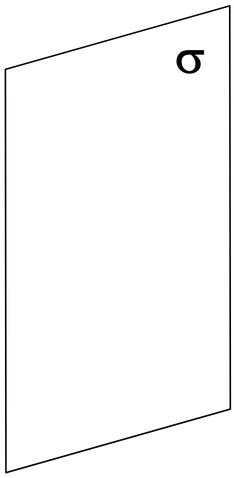


<u>上下方向の電界は無い</u>

ガウスの法則を使うと

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \Sigma q$$ 内部の電荷

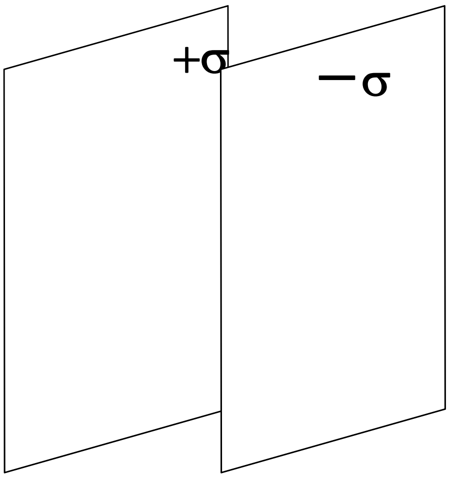
Q5-3　無限に広く薄い導体平板に面密度σ[C/m²]で電荷が一様に分布している。この平板からr[m]だけ離れている地点Pでの電界の大きさを求めなさい。



表と裏を考える

$$\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = \Sigma q$$

Q5-4　単位面積あたり，それぞれ+σ,−σ[C/m²]の電荷密度で一様に帯電している，無限に広い導体平板が平行に設置されている時，電界の大きさを求めなさい。 コンデンサの原理。



本日のまとめ

- ガウスの法則を式で表しなさい。
- ガウスの発散定理を説明しなさい。
- 電界の単位を2つ示しなさい。
- 2枚の無限平面導体平板における導体の電荷密度と，２枚の導体の間、および外側の電界強度を説明しなさい。