

平成22年度 工V系(社会環境工学科) 第11回 電磁気学 I
天野 浩

項目

アンペアの定義 電流と回路 キルヒホッフの法則の導出

ここでは定常電流実現までの道のりを振り返り、アンペアの定義、定常電流と電気回路の基本法則であるに関する電磁気学的な解釈を行います。

定常電流と直流回路

電池による定常電流実現までの道のり



1780年11月6日 ルイーゼ・ガルヴァーニ (イタリア ポローニャ大学解剖学教授) 二種類の金属を指すことによるカエルの足の痙攣を発見 (第一発見者はガルバーニの妻)



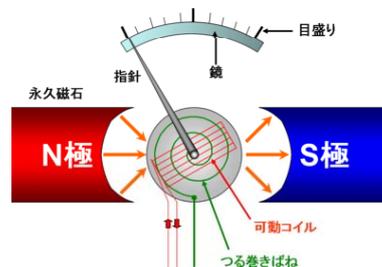
ガルバーニによれば電気は筋肉内にあるとされたが、残念ながらカエルが電気を持つのではなく、2種類の金属とカエルの足を環状に接続すればいつでもカエルは痙攣した。電源はカエルではなく2種の金属だったのである。

<http://www.ecs.shimane-u.ac.jp/break/flog/flog.html>



ガルバノメータ(検流計)

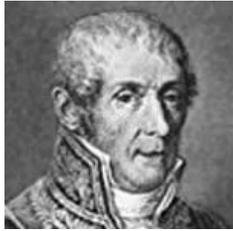
<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/ja/9/91/D.C.AMMETER.JPG>



検流計の原理

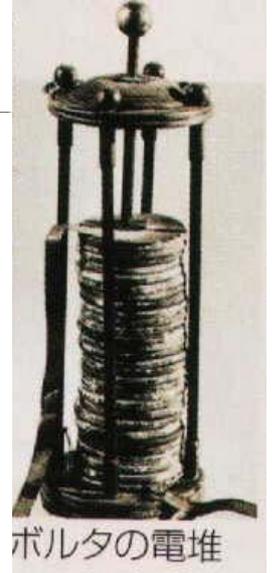
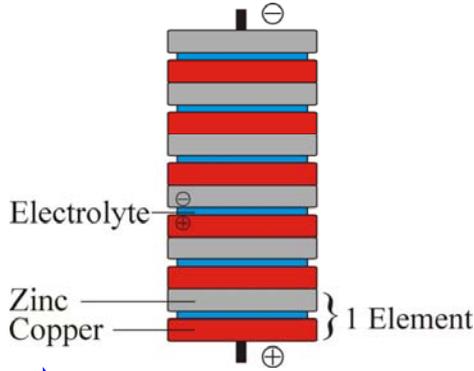
<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/ja/f/f9/Gmeterdiagram.png>

電池による定常電流実現までの道のり



1801年ころ アレッサンドロ・ジュゼッペ・ボルタ (イタリア コモ大学物理学教授) 銀とスズの板を互い違いに何層にも重ね、そこに食塩水をかけると電流が発生することを発見。
銅と亜鉛の組み合わせ → ボルタの電池

1881年、ボルタを記念し、電圧の基本単位の名はボルトとすることが決まった。



ボルタの電堆

➡ 高校の科学で習ったボルタの電池。動作機構を説明できますか？

➡ 電池の開発の歴史と種類を調べてみよう！

<http://www.nararika.com/butsuri/kagakushi/denki/volta.htm>
http://ja.wikipedia.org/wiki/%E7%94%BB%E5%83%8F:Voltaic_pile.png

電圧と電流の関係の法則化:オームの法則



1826年、ゲオルク・シモン・オームがオームの法則を発見。オームはフーリエが提唱した熱の流れに電気を当てはめ、熱でいう2点間の温度差と熱流を、それぞれ電圧と電流に置き換えてみた。ボルタ電池と自作の検流計を使用し、電線の太さや長さを変えて実験をしていくが、現在のオームの法則のような比例関係の式にはならなかった。(最初は失敗)

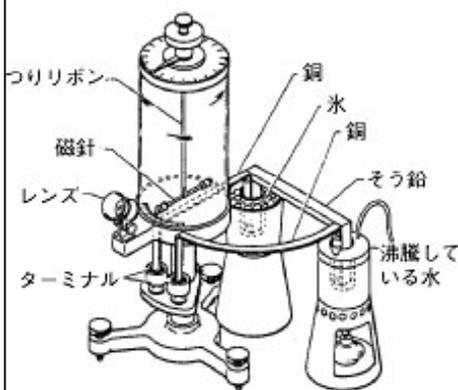
オームの実験装置

ボルタ電池 → ゼーベックの熱起電力に置き換え。ビスマスと銅を組み合わせた熱電対を作製し、片方を沸騰しつつある湯の中へ、片方を氷の入った水の中へ入れた。熱電対の温度差は100℃であり、湯の温度を調節することで、温度差、すなわち電圧の調整が容易となった。

これにより $X = a / (b + x)$ の式を導く。

- X: 電流
- a: 起電力 (電圧)
- b: 抵抗器の抵抗
- x: 導線の抵抗

この式が現在知られる $I = E / R$ に発展していくが、これには長い道のりがある。



SI単位系での電流 1A(アンペア)の定義

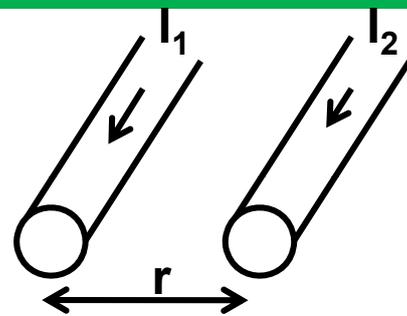
2本の平行導線に電流が流れていると力が働く。

$$f = k \frac{I_1 \cdot I_2}{r} \quad k \text{は比例定数}$$

$$k = \frac{\mu_0}{2\pi}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$$

と決める。



➡ **1[A]**とは、2本の導線に同じ電流を流し、その導線に働く力が **2×10^{-7} [N]**となる電流の大きさ。→アンペアの正式な定義。

μ_0 : 真空の透磁率 単位は[N/A²]または[H/m]

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 \cdot I_2}{r} [N] = I_1 \times \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_2}{r} = I_1 \times B_2 [N]$$

➡ 電流 I_2 の周りには磁束密度 B_2 の磁界ができる。

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r} I_2 \quad \rightarrow \quad \text{確かめよう！}$$

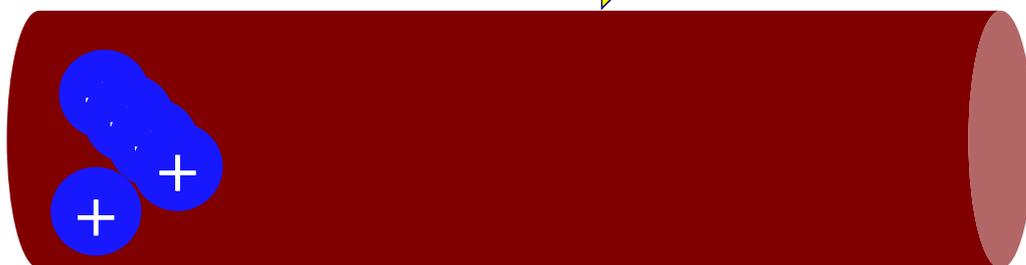
電流とは何か？ 実用的定義

電流の大きさ: 1[アンペア(Ampere : A)]: → 1[クーロン(Coulomb : C)]の電荷が1[秒(second : s)]に1個流れたら1A

$$[A] = \left[\frac{C}{s} \right]$$

電流には方向がある！

➡ 電流の向き



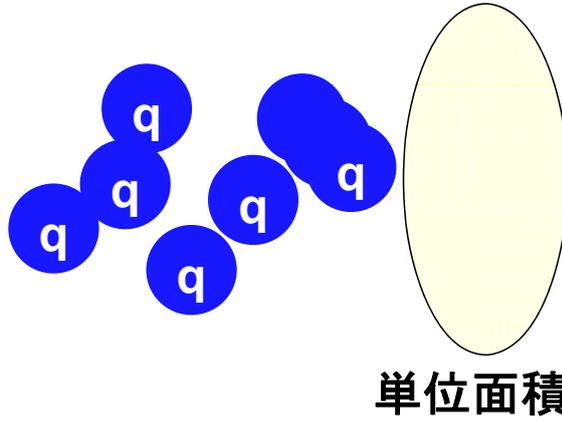
負電荷が動くと、電流の向きは反対

← 電流の向き



電流とは何か？ 実用的定義

電流密度: j [A/m²] 単位時間当たり、単位面積にどれだけの電荷が通過するか？



$$j = q \times n \times v$$

q : 各粒子の電荷 n : 粒子の密度 v : 粒子の速度(ドリフト速度)

$q \times n$ は電荷密度 $\rightarrow \rho$ と表す。

* 点 r での電流密度: $j(r) = \rho(r) \times v(r)$

* q がマイナスならば、電流の向きが反対になる。

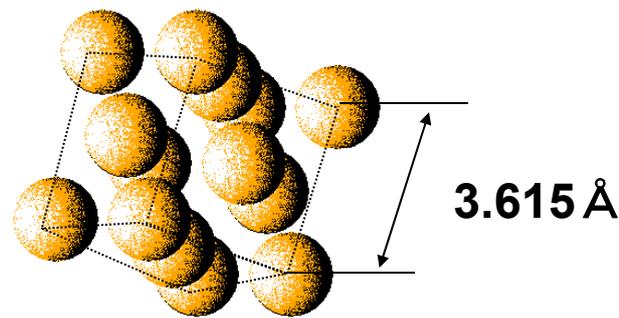
電流、電流と電流密度の関係

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

電荷の量が多ければ電流は大きい。
電荷が速ければ電流は大きい。

$$I = \int_S \vec{j}(r) \cdot d\vec{S}$$

Q11-1 銅の結晶構造は面心立方格子であり、格子定数(単位立方体の1辺の長さ)は 3.615 \AA である。一つの銅原子あたり一つの電子が放出されるとすると、 $1[\text{cm}^3]$ あたりどれだけの電子が存在するか？

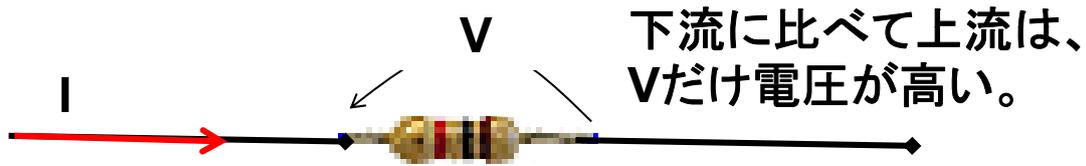


Q11-2 銅の自由電子濃度は $n=8.47 \times 10^{22}[\text{cm}^{-3}]$ である。直径 $1.0[\text{mm}]$ の銅の導線に $10[\text{A}]$ の電流が流れている。導線中の電子の平均のドリフト速度(電界による速度)を求めなさい。

電子の素電荷:
 $q=1.602 \times 10^{-19}[\text{C}]$

オームの法則

抵抗に電流Iを流すと、抵抗間の電圧VとIは比例する。



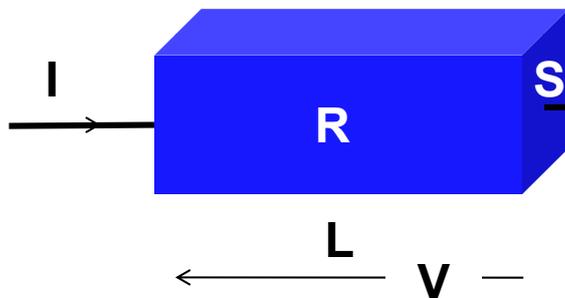
Resistor1 1.0kΩ

$$V = R \cdot I \quad \text{オームの法則という。}$$

単位: $\left[\frac{V}{A}\right] = [\Omega] \quad \text{オーム} \quad \text{Ohm}$

因みに $\left[\frac{A}{V}\right] = [\sigma] = [S]$
Mho ジーメンズ
(モ一)

微視的に見たオームの法則



断面積S、長さLの抵抗体がある。
抵抗Rとすると、 $V=R \cdot I$

Q11-3

抵抗体内部で電界Eが均一とすると、EとVの関係は

Q11-4

電流Iが均一に流れているとすると、電流密度JとIの関係は

$$V=R \cdot I \text{より}$$

微視的に見たオームの法則

$$J = \sigma \cdot E = \frac{1}{\rho} \cdot E$$

$$\sigma = \frac{L}{R \cdot S}$$

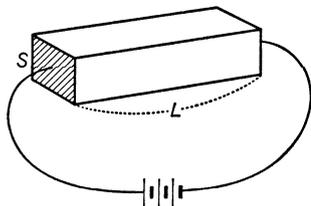
導電率

$$[S / m]$$

$$\rho = R \frac{S}{L} \rightarrow R = \rho \frac{L}{S}$$

抵抗率

$$[\Omega \cdot m]$$



Q11-5 左図のように、銀を断面積 S [cm^2]、長さ L [cm]の直方体に加工したとする。この電気抵抗 R [Ω]を、抵抗率 ρ 及び S 、 L を用いて表しなさい。また、厚さ 5.0 [μm]の銀のシートを、 10.0 [μm]の幅を直線状に残して、後は削りとってしまう加工のできる装置がある。これらを用いて 100 [Ω]の抵抗を作製したい。銀のシートをどのように加工すればよいか。ただし、銀の抵抗率は 1.59 [$\mu\Omega \cdot \text{cm}$]である。

ジュール熱

ジュールの法則: 導線中を流れる電流 I [A]によって発生する熱量 Q [J]は、電流 I の2乗と導線の抵抗 R と時間 t [s]に比例する。

$Q = I^2 R t$ [J]となる。

オームの法則 $V = R \times I$ を使うと



単位時間あたりに発生する熱量は

$Q = I^2 R = V \times I$ [J/s = W] ワット

➡ **電力**という。単位時間当たりのエネルギー

電力[W]に時間[h]をかけたものを電力量[Wh]という

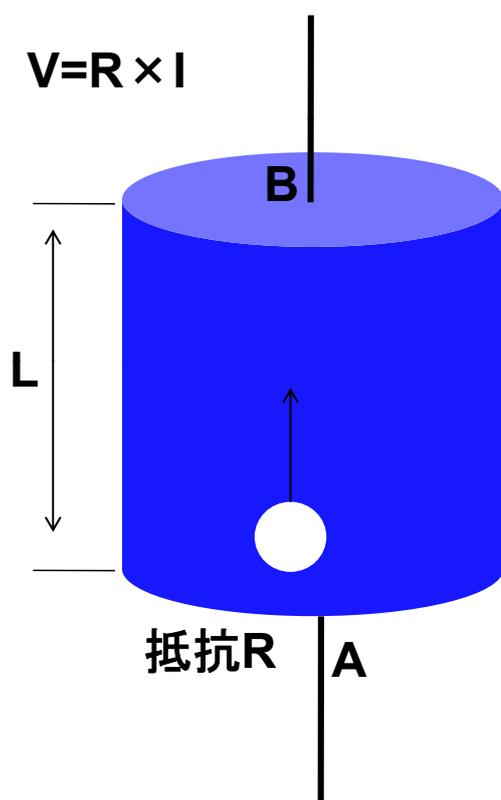
ジュール熱



単位に注目！

家庭用積算電力計

ジュール熱の原子論的解釈



抵抗 R に電流 I が流れ、端子 AB 間の電圧が V であったとする。抵抗 R の中で、電圧が均一であったとすると、

$$V = -\int_A^B E \cdot dr$$

従って電界 E は $E = \frac{V}{L}$

電流のもとになる電荷 q を持つ荷電粒子は $F = qE$ という力を受け続けるので、抵抗内で粒子は加速度運動するはずである。

ところが、抵抗内で粒子の速度は一定で電界に比例する。

➡ 抵抗の材料が加速度運動を妨げ、粒子が抵抗の材料にエネルギーを与え一定速度になる。

Q11-6 ジュール熱を利用した電気器具を三つ以上挙げなさい。

Q11-7 電力500Wのオーブントースターを100Vの電源につないだ。

(1) オーブントースターには何Aの電流が流れるか。

(2) オーブントースターの抵抗は何 Ω か。

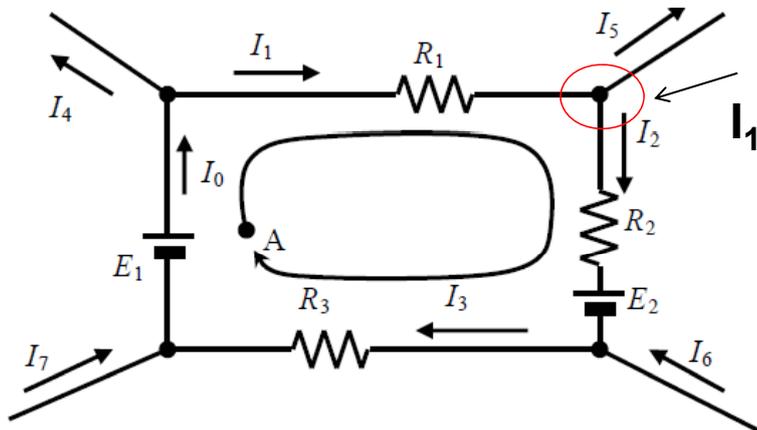
Q11-8 電力100Wの電球を毎日5時間つけたとき、30日間の電力量は何kWhになるか。

Q11-9 5Ωの電熱線に10Vの電圧をかけた。

(1)この電熱線に流れる電流は何Aか。

(2)この電熱線の電力は何Wか。

(3)この電熱線を15分間電流を流したら、電力量は何Whか。



この節点に注目する。

I_1 は節点に流入、 I_2 と I_5 は流出
 I_1 は+、 I_2 と I_5 は-
(逆でもよい)

直流電流が左から右へ流れていたら

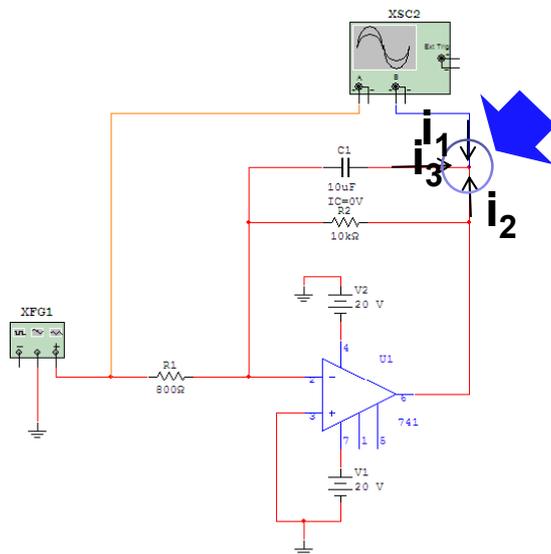


左の端子の方が電圧が高い

キルヒホッフの第一法則(電流則)

* 電気回路の任意の節点において、流れ込む向きを正(又は負)と統一すると、各線の電流を i_i としたとき、その総和は0となる。

* (あるいは、「流れ込む電流と流れ出す電流の和は0である」あるいは「流れ込む電流の和と流れ出る電流の和の大きさは等しい」と言い換えることができる。)



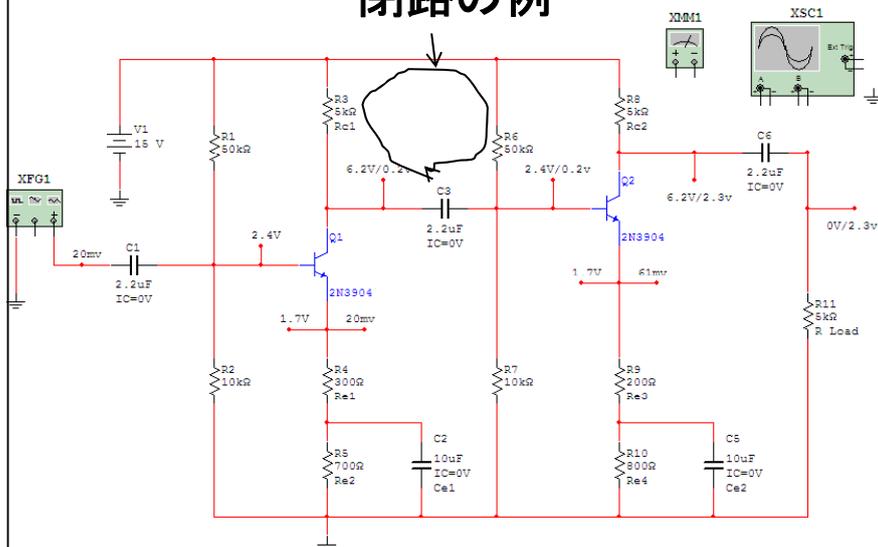
この節点に注目!

$$\sum_{i=1}^n i_i = 0$$

キルヒホッフの第二法則(電圧則)

電気回路に任意の閉路をとり電圧の向きを一方向に取ったとき、各区間の電圧を V_i とすると、電圧の総和は0となる。

閉路の例



$$\sum_{i=1}^n V_i = 0$$

キルヒホッフの第一法則の電磁気学的解釈

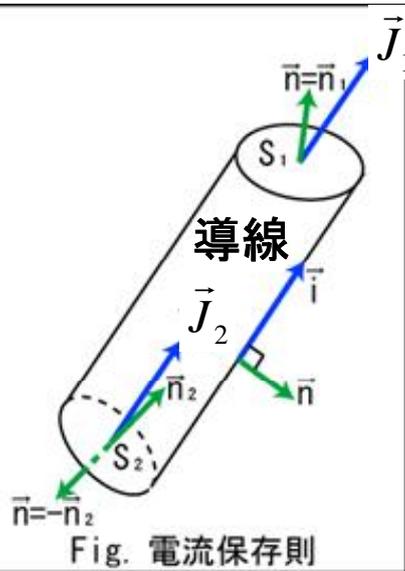
定常電流における電流保存則

定常電流が S_2 から S_1 に向かって流れ、側面からは流入も流出もしないとする。

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{n}_1 d\vec{S} &= \int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{n} dS \\ &= \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{n}_2 dS = \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot (-\vec{n}) dS \end{aligned}$$

側面からの流入、流出がないので

$$\oiint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad \text{積分形の電流保存則}$$



$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \oiint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad \rightarrow \quad \oiint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{J} dV = 0$$

ガウスの定理

$\nabla \cdot \vec{J} = 0$ 微分形の電流保存則

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0: \text{電荷の時間変化がある場合}$$

キルヒホッフの第二法則の電磁気学的解釈

閉回路で同じ位置に戻ってくれば、 $V=0$ は当たり前

$$V = -\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

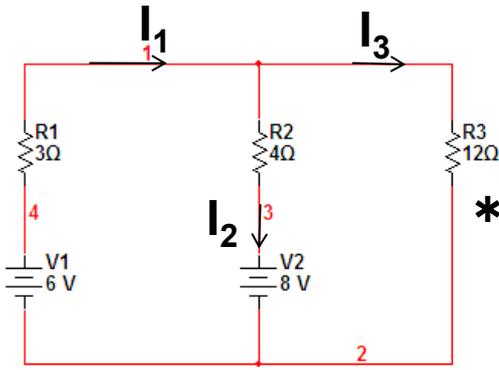
ストークスの定理

磁界の時間変化がある場合は

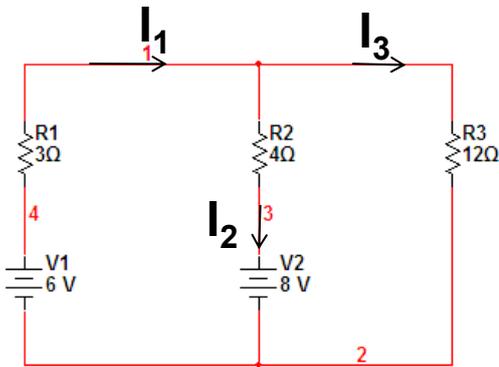
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

キルヒホッフの法則に関する注意事項

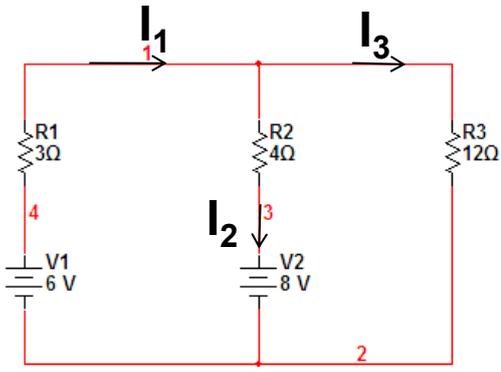
Q11-10 I_1 , I_2 , I_3 を求めなさい。



* 符号に注意して各閉回路の方程式を立てる。



I_1 , I_2 , I_3 を求めなさい。



I_1 , I_2 , I_3 を求めなさい。

本日のまとめ

- 10問中、何問正解したか書きなさい。
- オームの法則の微分形を書きなさい。
- 抵抗率 ρ と抵抗 R と断面積 S と長さ L の関係を示しなさい。
- 導電率 σ と抵抗率 ρ の関係を示しなさい。
- ジュールの法則の式を書きなさい。
- キルヒホッフの第一の法則をまとめなさい。
- キルヒホッフの第二の法則をまとめなさい。