 草刈圭一朗 ⟨kusakari@is.nagoya-u.ac.jp⟩

講義資料 (1): 集合・命題・関数

数学史上最も重要な発見・発明とは何であろうか．おそらく多くの人が『0 の発見』，より正確には古代インドで発明された『“0” という記号を明示的に用いた位取り記数法の発明』を挙げるであろうと思われる．この位取り記数法と言うのは皆様ご存知の所謂 “算用数字” の事です．自然数というのはそれこそ幼児でも認識できる基本的な概念ですが，これをどう記述するかという記法を最重要な発見・発明と考える方が多いというのは興味深い事実です．この事実は取りも直さず数学においての “記法” の重要性を示唆していると思われます.

本章では名古屋大学工学部電気電子・情報工学科で学び研究していく上で必須となる基本的な記法を紹介する．集合論や数理論理学を本式に学んだ人から見たらかなり乱暴な議論もあると思います．ですが，本章の目的は集合論や数理論理学という “学問を学ぶ” ことではなく “記法の習得” であるため見逃して貰いたい.

1.1 集合 (1)

本節は，教科書 1.1.1 節 (pp.1–3) に対応する.

定義 1.1 (素朴な意味での) **集合** (set) とは対象の集まりのことである．また，集合に属す対象を，その集合の**要素**または**元** (element) と呼ぶ．また，以下の記法を用いる.

- $a \in A \overset{\text{def}}{\iff}$ 対象 a は集合 A の要素である
- $a \notin A \overset{\text{def}}{\iff}$ 対象 a は集合 A の要素でない

要素数が有限の集合を**有限集合** (finite set)，要素数が無限の集合を**無限集合** (infinite set) と呼ぶ．また，要素を一つも含まない集合を**空集合** (empty set) と呼び，$\emptyset$ で記す. □

集合は大別して以下の 2 通りの表現法で表現される.

- 列挙式表記 (外延的表記): 要素の全て (“. . .” を用いた略記も使われる) を括弧 { } でくくって示す.
$$\{2, 4, 6, 8\},\quad \{0\},\quad \{1, 3, 5, \ldots\}$$
- 一般形と条件による表記 (内包的表記): 一般形とそれについての条件を | で区切って記し全体を { } で囲む.
$$\{2n \mid n \in \mathbb{Z}, 1 \leq n \leq 4\},\quad \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は素数}\}$$

本講義で説明無しに使われるであろう代表的な集合をいくつか挙げておく.

- $\emptyset \cdots$ 空集合 (要素を一つも含まない)
- $\mathbb{N} \cdots$ 自然数集合 (0 を含む)

- $\mathbb{Z}$ ⋯ 整数集合
- $\mathbb{Q}$ ⋯ 有理数集合
- $\mathbb{R}$ ⋯ 実数集合
- $\mathbb{C}$ ⋯ 複素数集合

NOTE: 集合とは何か，という問いはとてつもなく深い問いであり，本講義の枠組みを遥かに越えるので割愛する．興味がある方はZF集合論等のキーワードで文献を漁るべし．

1.2 論理記法

本節は，教科書1.1.3節(pp.5–7)に対応する．本節では命題の表現法や論理記号による表現を紹介する．

定義 1.2 **命題** (proposition) とは真偽が確定できる文である．

- 「モーツァルトは1756年に生まれた」は真なる命題
- 「モーツァルトは2003年に死んだ」は偽なる命題
- 「あなたは何才ですか」は命題でない
- 「かくすれば かくなるものと知りながら 已むに已まれぬ大和魂」は命題でない

「xは3より小さい」という文は，$x \in \mathbb{Z}$ときめておいたとすれば，xの値ごとに真偽が定まる．そこで，これを**命題関数** (propositional function) または**述語** (predicate) と呼び，$P(x)$のように書く．ここで，全てのxに対して$P(x)$が真となるとき，述語Pは**恒真** (valid) であると呼ぶ．また，命題や述語を表す式を**論理式**と呼ぶ． □

さて，述語$P(x)$を以下で定義してみよう．

$$P(x) \overset{\text{def}}{\iff} x \leq 3$$

このとき，$x = 4$とおいた場合，すなわち「$4 \leq 3$」を$P(4)$で表す．なお，この命題$P(4)$は偽である．また，以下のような2個以上の変数を含む述語も考えられる．

$$Q(x,y) \overset{\text{def}}{\iff} x^2 + y^2 \geq 2xy$$

変数に代入して良い範囲(集合)を**対象領域**という．対象領域を変えると命題の性質が変わることがあるから注意を要する．例えば，$P(x) \overset{\text{def}}{\iff} x \geq 0$とすると，

- 対象領域$\mathbb{N}$において$P(x)$は恒真
- 対象領域$\mathbb{Z}$において$P(x)$は恒真でない
- 対象領域$\mathbb{C}$において$P(x)$は論理式ですらない

最後の対象領域が $\mathbb{C}$ の場合は，$\geq$ の解釈が未定義なため $P(x)$ が真か偽かの議論ができない．そのために，もはや命題ですらない．逆に言うと，$\mathbb{C}$ 上できちんと "$\geq$" の意味が定義されていれば，命題と呼んでも良いと言える．本講義では，"$\geq$" のような基本的な数学記号の定義は高校までで習ってるような "常識" に基づいて取り扱っていくとする．

定義 1.3　論理結合子 (logical connective) を以下で定義する．

- $P \wedge Q$：**論理積** (conjunction)
  2 つの論理式 P, Q が共に成立することを意味する論理式
- $P \vee Q$：**論理和** (disjunction)
  論理式 P または論理式 Q が成立することを意味する論理式
- $P \Rightarrow Q$：**含意** (implication)
  論理式 P が成立するときはいつでも論理式 Q が成立することを意味する論理式
- $\neg P$：**否定** (negation)
  論理式 P が成立しないことを意味する論理式
- $P \iff Q$：**論理的同値** (logically equivalent)
  2 つの論理式 P, Q が成立するかどうかがつねに一致することを意味する論理式
- $\forall x \in X. P(x)$：**全称限量子** (universal quantifier)
  対象領域 X に属す全ての x に対して $P(x)$ が成立することを意味する論理式
- $\exists x \in X. P(x)$：**存在限量子** (existential quantifier)
  ある元 x が対象領域 X に存在して $P(x)$ が成立することを意味する論理式 □

なお，全称限量子と存在限量子の利用時にしばしば対象領域を省略する．また，本資料では "$\Rightarrow$" 記号で含意を表現しているが，"$\rightarrow$" 記号や "$\supset$" 記号を用いることも多い．
ここで，以下の二つの論理式を考える．ただし，対象領域は $\mathbb{N}$ であるとする．

$$Even(x) \overset{\text{def}}{\iff} x \text{ は偶数}, \quad Odd(x) \overset{\text{def}}{\iff} x \text{ は奇数}$$

このとき，

- $Even(7) \wedge Odd(7)$，すなわち，"7 は偶数かつ奇数である" は偽.
- $Even(7) \vee Odd(7)$，すなわち，"7 は偶数または奇数である" は真.

この "かつ ($\wedge$)" と "または ($\vee$)" の違いに気をつけて欲しい．また，以下に示すように $\forall$ と $\exists$ の違いにも気をつけて欲しい.

- $\forall x. Even(x)$，すなわち，"全ての自然数 x は偶数である" は偽.
- $\exists x. Even(x)$，すなわち，"ある自然数 x は偶数である" は真.

最後にもう一組の似て非なる論理式を見てみよう．

- $\forall x.[Even(x) \vee Odd(x)]$ は真
- $\forall x.Even(x) \vee \forall x.Odd(x)$ は偽

一般に，$\forall x.[P(x) \vee Q(x)]$ と $\forall x.P(x) \vee \forall x.Q(x)$ は異なる意味を持つ論理式である．
さて，論理式の解釈で間違いやすいのが以下に示す $P \Rightarrow Q$ の解釈である．

$$(P \Rightarrow Q) \text{ が真} \iff P \text{ が偽，または } P, Q \text{ 共に真}$$

ここで，P が偽の場合は例え Q が偽でも全体としては真となってしまうということに疑問を感じる方が多々いるかも知れない．しかし，この解釈は数学的には自然な解釈なのである．ここで，以下で定義される論理式 $R(x)$ を考えてみよう．

$$R(x) \overset{\text{def}}{\iff} x \geq 1 \Rightarrow x \geq 0$$

対象領域を $\mathbb{Z}$ であるとする．また，“$\Rightarrow$” の左側の $x > 1$ を前提部，右側の $x > 0$ を結論部と呼ぶとする．

- $x < 0$ の場合：前提部は偽，結論部も偽
- $x = 0$ の場合：前提部は偽，結論部は真
- $x > 0$ の場合：前提部は真，結論部も真

当然のことながら任意の x に対し $R(x)$ は成立すると考えるべきであろう．すなわち，上記の 3 つの場合すべてにおいて，$R(x)$ は成立すると考えるべきであろう．というわけで，$\Rightarrow$ の解釈は非常に自然な解釈なのである．

NOTE: 上述の “自然な” という概念を定義するのは不可能であろうが，数学を学ぶ上で必須な概念であると信じる．なればこそ，“自然な” と言う概念を使いこなせる能力は数学的感性そのものであると断言してかまわないと私は考える．例えば，$\sum_{k=1}^{n} k$ や $\prod_{k=1}^{n} k$ は $n = 0$ のとき如何なる値を持つと考えるのが “自然” であろうか．あぁでもないこうでもないと推考するのも面白いであろう．

NOTE: 本講義では教育効果を考えて $\iff$ と $\overset{\text{def}}{\iff}$ を明確に区別する (大抵の専門書や論文では区別しないが)．すなわち，論理的関係を記しているのか，何らかの定義を記しているのか，を明確に区別する．また，同様の理由により $=$ と $\overset{\text{def}}{=\!=}$ も明確に区別する．

最後に，論理記法の略記法を紹介する (すでに本資料でも用いているが$\cdots$)．

- 対象領域の省略: 文脈から対象領域が明らかな場合，限量子における対象領域の記述を省略する．

略記	本来の論理式
$\forall x.P(x)$	$\forall x \in X.P(x)$
$\exists x.P(x)$	$\exists x \in X.P(x)$

- 結合の強さを用いた括弧の省略: 論理演算子の結合の強さを以下のように考え，括弧の省略を許す.

  $$\text{限量子}\ (\forall, \exists),\ \text{否定}\ (\neg) > \text{論理積}\ (\wedge),\ \text{論理和}\ (\vee) > \text{含意}\ (\Rightarrow) > \text{論理的同値}\ (\Longleftrightarrow)$$

略記	本来の論理式
$\neg P_1 \wedge P_2$	$(\neg P_1) \wedge P_2$
$P_1 \wedge P_2 \Rightarrow P_3 \vee P_4$	$(P_1 \wedge P_2) \Rightarrow (P_3 \vee P_4)$

  なお，論理積 $(\wedge) >$ 論理和 $(\vee)$，と考える場合も多い.

- 連続した論理積, 論理和に関する括弧の省略: 論理積 $(\wedge)$ と論理和 $(\vee)$ は結合律と呼ばれる性質を満たす (後述)．すなわち，$(P_1 \wedge P_2) \wedge P_3$ と $P_1 \wedge (P_2 \wedge P_3)$ は論理的に等価である．そのため，括弧を省略しても論理的曖昧さが発生しないので，括弧の省略が許される．

略記	本来の論理式
$P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$	$(P_1 \wedge P_2) \wedge P_3$ または $P_1 \wedge (P_2 \wedge P_3)$
$P_1 \vee P_2 \vee P_3$	$(P_1 \vee P_2) \vee P_3$ または $P_1 \vee (P_2 \vee P_3)$

- 連続した同一の限量子の圧縮:

略記	本来の論理式 (対象領域は省略)
$\forall xy.P(x,y)$	$\forall x.\forall y.P(x,y)$
$\forall x,y.P(x,y)$	$\forall x.\forall y.P(x,y)$
$\exists x,y.P(x,y)$	$\exists x.\exists y.P(x,y)$

- 限量子に条件を付加する場合がある．以下に例で示す.

略記	本来の論理式 (対象領域は省略)
$\forall x > 0.P(x)$	$\forall x[x > 0 \Rightarrow P(x)]$
$\exists x > 0.P(x)$	$\exists x[x > 0 \wedge P(x)]$

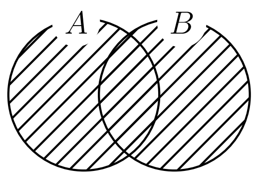
  この略記法は “$\forall$” と “$\exists$” に対して解釈が異なることに注意.

1.3 集合 (2)

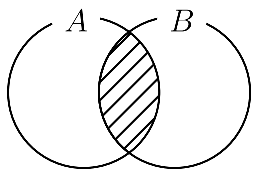
本節は，教科書 1.1.4 節 (pp.7–9) に対応する．

定義 1.4 集合に対する各種演算は以下で定義される．

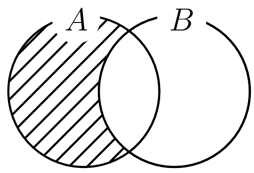
- **和集合** (union): $A \cup B \overset{\text{def}}{=\!=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



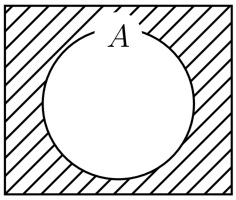
- **積集合** (intersection): $A \cap B \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{x \mid x \in A \land x \in B\} = \{x \mid x \in A, x \in B\}$



- **差集合** (difference set): $A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{x \in A \mid x \notin B\}$ ($A - B$ で記すこともある)



- **補集合** (complements): $\overline{A} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{x \in U \mid x \notin A\}$ (ただし，全体集合を U とする)



□

なお，上の定義中で説明のために用いた図を**ヴェン図** (Venn diagram) と呼ぶ．
集合を記す際には簡便のため，以下のような略記法も許すことにする．ただし，$X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ であるとする．

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{A_i \in X} A_i = \bigcup \{A_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{A_i \in X} A_i = \bigcap \{A_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

定義 1.5 集合上の各種関係は以下で定義される．

- $A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall a \in A.\ a \in B$
- $A = B \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B \land B \subseteq A$
- $A \subsetneq B \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B \land A \neq B$

$A \subseteq B$ のとき，A は B の**部分集合** (subset) であるといい，特に，$A \subsetneq B$ のとき，A は B の**真部分集合** (proper subset) であるという． □

上記の定義を見て分かるように，集合上の各種演算や関係が全て "$\in$" に基づき定義されていることは知っておかれたし．

上記の定義に従い $A \subseteq A \cup B$ は以下のように証明できる．

> $x \in A$ とする．このとき，$x \in A \vee x \in B$ が成立するので $x \in A \cup B$.
> よって，$A \subseteq A \cup B$.

また，以下のように論理記法を用いて証明を書き下すこともできる．

$$x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$$

これらの証明のように，$X \subseteq Y$ を証明するためには，$\subseteq$ の定義に基づいて「任意の $x \in X$ に対し $x \in Y$ である」という命題を証明するか，これと等価な「$x \in X$ ならば $x \in Y$ である」という命題を証明しなければならない．
同様に二つの集合の等価性 $X = Y$ を示すためには,「任意の $x \in X$ に対し $x \in Y$ である」ことと「任意の $y \in Y$ に対し $y \in X$ である」ことの双方を示さなければならない．

定義 1.6 集合 A の部分集合全体からなる集合 $\{X \mid X \subseteq A\}$ を集合 A の**巾集合** (power set) と呼び $P(A)$ で記す (2^A と記すときもある)． □

例えば，$A = \{0, 1\}$ とすると，$P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ となる．

定義 1.7 集合 A, B の**直積集合** ((Cartesian) product set) $A \times B$ を以下で定義する．

$$A \times B \overset{\text{def}}{=\!=} \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

また，$A \times A$ を A^2 で略記する．同様に，$A_1 \times \cdots \times A_n$ の定義や A^n の略記法も与える． □

命題 1.8

(1) **巾等律** (idempotent law)
$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$

(2) **交換律** (commutative law)
$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$

(3) **結合律** (associative law)
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(4) **分配律** (distributive law)
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(5) **吸収律** (absorption law)
$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A$

(6) **復元律**
$(A^c)^c = A$

(7) **ドゥ・モルガンの法則** (de Morgan's law)
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ □

NOTE: 命題 1.8 の各性質が全て成立することはヴェン図を用いて容易に確かめられるのだが，これは証明ではなく，説明である．一般論ではあるが，“説明” において重要なのは相手にイメージを湧かすことであり，それゆえに多少大雑把な議論をしてもかまわない．よって，定義に基づき厳密に取り扱う必要がある “証明” とはずいぶんと趣きが異ってくるのは必然である．もちろん，説明する能力も証明する能力も共に重要な能力ではあるが，さらに重要な能力は，説明すべき時に説明し，証明すべき時に証明する，というように状況に応じて使い分ける能力である．本講義では，教育効果を考えて，説明と証明を明確に区別して議論を進めていく．

1.4 関数

本節は，教科書 1.1.2 節 (pp.3–5) に対応する．

定義 1.9 関数 (function)f が集合 A から集合 B への関数であることを明示するとき $f : A \to B$ で記す．また，このとき，集合 A を関数 f の**定義域** (domain)，集合 B を関数 f の**値域** (range, codomain) と呼ぶ．

- $f : A \to B$ が**全射関数** (surjection) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall b \in B.\ \exists a \in A.\ f(a) = b$
- $f : A \to B$ が**単射関数** (injection) $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall a_1, a_2 \in A.\ (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$
- 全射かつ単射な関数を**全単射関数** (bijection) と呼ぶ．

集合 A から集合 B への関数の全体を B^A で記す．なお，関数 $f : A \to B$ は全ての $a \in A$ に対して一意に $f(a) \in B$ が決定されていなければならないとする． □

定義 1.10 集合 A 上の関数 f $(\in A^A)$ が**恒等関数** (identity function) であるとは任意の元 $a \in A$ に対し $f(a) = a$ が成立することである．以下では集合 A 上の恒等関数を I_A と記す．また，関数 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ の**合成関数** (composite function)$g \circ f : A \to C$ を以下で定義する．

$$(g \circ f)(a) \overset{\text{def}}{=} g(f(a))$$ □

NOTE: 合成関数 $g \circ f$ を $(g \circ f)(a) \overset{\text{def}}{=} f(g(a))$ で定義する場合もある注意されたし．

命題 1.11 $f : A \to B$ と $g : B \to A$ を関数とする．$g \circ f = I_A$ ならば f は単射であり g は全射である．

証明 最初に f が単射であることを示す．$f(a_1) = f(a_2)$ とする．このとき，$g \circ f(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = g \circ f(a_2)$．仮定より $g \circ f = I_A$ であるので，$a_1 = I_A(a_1) = g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2) = I_A(a_2) = a_2$．
次に，g が全射であることを示す．a を A の任意の元とする．仮定より $g \circ f = I_A$ であるので，$a = I_A(a) = g \circ f(a) = g(f(a))$ となる．すなわち，$f(a) \in B$ が存在して $g(f(a)) = a$． □

定義 1.12 $f : A \to B$ を関数とする．A の部分集合 A_1 に対し B の部分集合 $\{f(a) \mid a \in A_1\}$ を f による A_1 の**像** (image) といい $f(A_1)$ で記す．また，B の部分集合 B_1 に対し A の部分集合 $\{a \in A \mid f(a) \in B_1\}$ を f による B_1 の**逆像** (inverse image) といい $f^{-1}(B_1)$ で記す． □

例 1.13 $f : A \to B$ とし，A_i $(i = 1, 2)$ を A の部分集合とする．このとき，$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ の証明を以下のように与えることができる．

$$\begin{aligned} b \in f(A_1 \cup A_2) &\iff \exists a \in A_1 \cup A_2.\ f(a) = b \\ &\iff \exists a_1 \in A_1.\ f(a_1) = b \text{ または } \exists a_2 \in A_2.\ f(a_2) = b \\ &\iff b \in f(A_1) \text{ または } b \in f(A_2) \\ &\iff b \in f(A_1) \cup f(A_2) \end{aligned}$$

□

例 1.14 $f : A \to A$ とし，A_1 を A の部分集合とする．このとき，$A_1 \subseteq f^{-1}(f(A_1))$ の証明を以下のように与えることができる．

> a を A_1 の任意の元とする．定義より $f(a) \in \{f(a') \mid a' \in A_1\} = f(A_1)$ が成立．よって，$a \in \{a' \in A_1 \mid f(a') \in f(A_1)\} \subseteq \{a' \in A \mid f(a') \in f(A_1)\} = f^{-1}(f(A_1))$.

なお上記の命題において，一般には等号関係は成立しない．すなわち，$A_1 = f^{-1}(f(A_1))$ は一般には成立しない．例えば，$A = \{0, 1\}$，$A_1 = \{1\}$，$f(0) = f(1) = 1$ の場合を考えると，$f^{-1}(f(A_1)) = f^{-1}(\{1\}) = \{0, 1\} \neq \{1\} = A_1$ となる． □

演習課題

今回は第 1 回の講義なので皆さんの数学的能力 (数学的感性) を見てみたい．というわけで，趣味の問題を数問混ぜておく．なお，この手の問題を “楽しめる能力” こそが最重要の能力であると信じる．

問 1.1 3–4 世紀にアレクサンドリアで活躍したディオファントスの墓碑銘は以下のようなものであったという．さて彼は何才まで生きたのか？

> この墓石の下に，ディオファントス眠る．見よ，この驚異の人を！
> ここに眠れる人の技を介して，墓石はその歳を示さん．
> 神の許しのままに，彼は生涯の 1/6 を少年として過ごし，
> 続く生涯の 1/12 は，その頬に髭をたくわえ，
> さらに生涯の 1/7 を経て妻を娶り，5 年の後に 1 人の息子を得た．
> 悲しいかな，その息子，人々の愛を受けつつ，
> 父の生の半分を生き，運命の下に身罷る．
> この大いなる悲しみに追われること 4 年，
> 父もまたその地上の生を終える．

問 1.2 以下の問いに答えよ．なお，これらの問題は 12–13 世紀にイタリアのピサで活躍したフィボナッチによる．

(1) 銀貨を持った 3 人の男が，銀貨の入った財布を見つけました．最初の男は，2 番目の男に「この財布を僕がとると君の 2 倍の銀貨を持つことになる」と言いました．2 番目の男は，3 番目の男に「この財布を僕がとると君の 3 倍の銀貨を持つことになる」と言いました．3 番目の男は，最初の男に「この財布を僕がとると君の 4 倍の銀貨を持つことになる」と言いました．財布にはいくら入っていて，3 人の男たちはそれぞれいくら持っていたのか？

(2) ある人が壁で囲まれた場所に生後すぐの 1 つがいのウサギを入れました．1 年後には何つがいのウサギになるか？ただし，どのつがいも生まれて 2ヶ月目から毎月 1 つがいのウサギを産むものとする．

問 1.3 以下の問いに答えよ．なお，この問題は 17–18 世紀にイギリスで活躍したニュートンによる．

> 牧場の草は一様な濃さと速さで育っている．この草を 70 頭の牛が 24 日で食べ尽くし，30 頭なら 60 日で食べ尽くす．96 日もたせるには，牛を何頭にすればよいか？

問 1.4 $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ．

問 1.5 以下で定義される論理式をできるだけ簡易な日本語で表現せよ．なお対象領域は $\mathbb{N}$ であるとする．

$$\begin{aligned} P_1(x,y) &\overset{\text{def}}{\iff} \exists z.\ x = zy \\ P_2(x) &\overset{\text{def}}{\iff} x \geq 2 \wedge \forall u,v[x = uv \Rightarrow u = 1 \vee v = 1] \end{aligned}$$

問 1.6 以下の文をできるだけ簡単な論理式で書き下せ．なお，対象領域は $\mathbb{N}$ であるとする．また，関数 f の根とは $f(x) = 0$ となる x の事である．

(1) x は偶数である　(2) 関数 f の根は存在しない　(3) 関数 f の根は只一つ存在する

問 1.7 対象領域は $\mathbb{Z}$ であるとする．論理式 $\forall x.\exists y.\ x > y$ と $\exists x.\forall y.\ x > y$ が恒真かどうか答えよ．

問 1.8 A を要素数が n 個の有限集合であるとする．このとき，A の巾集合 $P(A)$ の要素数が 2^n 個であることを n に関する帰納法で証明せよ．

なお，この事実より A の巾集合の記法として 2^A という記法が存在するのである．

問 1.9 以下の集合をヴェン図で描け．

(1) $\overline{A \cap B}$　(2) $(A \cap B) \cup C$　(3) $(A \cup B) \setminus C$　(4) $(A \cup B) \setminus \overline{C}$

問 1.10 命題 1.8 が正しいことをヴェン図を描くことにより確かめよ．

問 1.11 命題 1.8 を証明せよ.

問 1.12 以下を証明せよ.

(1) $A \subseteq B \iff A \cup B = B$

(2) $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$

(3) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$

(4) $A \subseteq C \Rightarrow (A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

問 1.13 $f : A \to B$ と $g : B \to C$ と $h : C \to D$ を関数とする. このとき $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ であることを証明せよ.

問 1.14 $f : A \to B$ を関数とし, A_1, A_2 を A の部分集合, B_1, B_2 を B の部分集合とする. このとき, 以下の等号関係が成立することを示せ.

$$
\begin{array}{lrcl}
(1) & f^{-1}(B_1 \cup B_2) & = & f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \\
(2) & f^{-1}(B_1 \cap B_2) & = & f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \\
(3) & f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) & = & f^{-1}(B_1 \setminus B_2)
\end{array}
$$

また, 以下の包含関係が成立することを示せ.

$$
\begin{array}{lrcl}
(4) & f(A_1 \cap A_2) & \subseteq & f(A_1) \cap f(A_2) \\
(5) & f(f^{-1}(B_1)) & \subseteq & B_1 \\
(6) & f(A_1) \setminus f(A_2) & \subseteq & f(A_1 \setminus A_2)
\end{array}
$$

問 1.15 問 1.14 の (4–6) において一般には等号関係は成立しない. このことを反例により示せ.

問 1.16 元を 2 個以上含む集合 A を考える. 関数 $f : A \to B$ に対し $g \circ f = I_A$ となる関数 $g : B \to A$ が存在するための必要十分条件を与えよ. また, このような関数 g が一意に存在するための必要十分条件を与えよ. さらに, これらの与えた条件が正しいことの証明も与えよ.

NOTE: 関数 $f : A \to B$ に対し $g \circ f = I_A$ となる関数 g が一意に存在するとき, g を f の**逆関数** (inverse function) と呼び, f^{-1} で記す.