Lect 8 基底と次元

復習： V：ベクトル空間

$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k} \in V$

① $\langle \vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k} \rangle = \{ c_1\vec{v_1} + \cdots + c_k\vec{v_k} \mid c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{R} \}$

② $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ は1次独立

$\overset{def}{\iff}$ (*) $c_1\vec{v_1} + \cdots + c_k\vec{v_k} = \vec{0}$ は非自明な解を持たない.

(*)は次のように言ってもよい

$c_1\vec{v_1} + \cdots + c_k\vec{v_k} = \vec{0} \Longrightarrow c_1 = \cdots = c_k = 0$

③ (Ex 7-7)

$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ の中に $\vec{0}$ ベクトルがあれば1次独立でない

1. 1次独立の意味

☆ 一意性

Prop 1 $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$: 1次独立とする.
Vの元 $\vec{w}$ が $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ の1次結合で表されたとすると.
その表し方は一意的である.

Proof) $\vec{w} = c_1\vec{v_1} + \cdots + c_k\vec{v_k}$
$\quad = c_1'\vec{v_1} + \cdots + c_k'\vec{v_k}$ 2通りの表し方

とする. 移項して整理すると.

$(c_1 - c_1')\vec{v_1} + \cdots + (c_k - c_k')\vec{v_k} = \vec{0}$

よって 1次独立性より

$c_1 - c_1' = \cdots = c_k - c_k' = 0$

よって $c_1 = c_1', \cdots, c_k = c_k'$ ▨

☆ 1次独立の意味

① $k=1$

復習 (Lect 6) $c \cdot \vec{v} = \vec{0} \iff c = 0$ または $\vec{v} = \vec{0}$

$\vec{v_1}$ は 1次独立

$\iff$ $c \cdot \vec{v_1} = \vec{0}$ ならば $c = 0$

$\iff$ $\vec{v_1} \neq \vec{0}$

すなわち. $\vec{v_1}$ は 1次独立 $\iff \vec{v_1} \neq \vec{0}$

② $\underline{k=2}$

$\vec{v_1}, \vec{v_2}$ は 1次独立 で ない

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} = \vec{0}$ は 非自明な解を持つ.

$\overset{(※)}{\Longleftrightarrow}$ $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ の 少なくとも 1つが 他の スカラー倍 で 表せる.

(※) について.

$(\Longrightarrow)$ c_1, c_2 を $c_1\vec{v_1} + c_2\vec{v_2} = \vec{0}$ の 非自明な解とする

たとえば $c_1 \neq 0$ とすると. 両辺 に $\frac{1}{c_1}$ をかけて.

$\vec{v_1} + \frac{c_2}{c_1}\vec{v_2} = \vec{0}$

$\therefore$ $\vec{v_1} = -\frac{c_2}{c_1}\vec{v_2}$ ($\vec{v_1}$ は $\vec{v_2}$ のスカラー倍)

$(\Longleftarrow)$ たとえば $\vec{v_1} = c\vec{v_2}$ とする.

移項して $\vec{v_1} - c\vec{v_2} = \vec{0}$

$\underset{\substack{\ne \\ 0}}{1} \cdot \vec{v_1} + \underset{\substack{\uparrow \\ 0\text{かもしれない.}}}{(-c)}\vec{v_2} = \vec{0}$ 非自明な解をもつ ∎

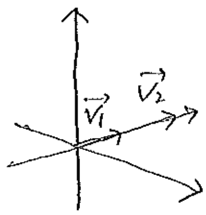
$\underline{例1}$ $V = \mathbb{R}^2$

$\vec{v_1}, \vec{v_2}$ が 1次独立で ない.

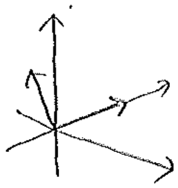
$\Longleftrightarrow$ $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ 原点, を通る

同一直線上 にある.

(いずれかが $\vec{0}$ の場合も含む)



上以外のとき 1次独立 になる.



③ $k \geq 2$: 一般

Prop 2 $k \geq 2$ のとき、
$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ が 1次独立 でない。
$\Longleftrightarrow$ $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ のうち、少なくとも 1つが 残りのベクトルの 1次結合 で表される。

Proof) $k=2$ と同様

($\Longrightarrow$) $c_1, \cdots, c_k$ を $c_1\vec{v_1}+\cdots+c_k\vec{v_k}=\vec{0}$ の非自明な解 とする。
たとえば、$c_1 \neq 0$ とする。上式の両辺に $\frac{1}{c_1}$ をかけて

$$\vec{v_1}+\frac{c_2}{c_1}\vec{v_2}+\cdots+\frac{c_k}{c_1}\vec{v_k}=\vec{0}$$

$$\therefore \vec{v_1}=-\frac{c_2}{c_1}\vec{v_2}-\cdots-\frac{c_k}{c_1}\vec{v_k}$$

他の場合 も同様

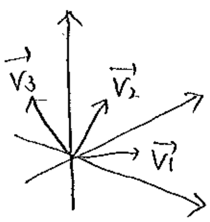
($\Longleftarrow$) たとえば、
$\vec{v_1}=c_2\vec{v_2}+\cdots+c_k\vec{v_k}$ とする
移項して

$$\underset{\neq 0}{1}\cdot\vec{v_1}-c_2\vec{v_2}-\cdots-c_k\vec{v_k}=\vec{0} \text{, } \blacksquare$$

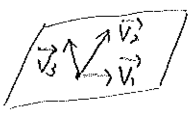
prop 2の言いかえ

Prop 2' $k \geq 2$ のとき、
$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ が 1次独立
$\Leftrightarrow$ $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ が 互いに他の 1次結合で 表せない

例2 $V=\mathbb{R}^3$



$\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ が 1次独立
$\Longleftrightarrow$ $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ が 原点を通る 同一平面上にない



これは ×

7. 基底と次元

☆基底

Def V: ベクトル空間

$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n} \in V$ が V の基底 (basis)

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (1)\ \vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n} \text{ は 1次独立} \\ (2)\ \langle \vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n} \rangle = V \end{cases}$$

覚えよう　　(一般には $\subset$ しか成立しない)

(1), (2) の意味

(2) $\Longleftrightarrow$ V の任意の元 $\vec{w}$ は $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$ の 1次結合で表せる.

(1) $\Longleftrightarrow$ 互いに他の 1次結合で表せない

ポイント① 基底とは, V の元を 1次結合で表すような最少のベクトルの組である.

Remark:
- V は基底を持つとは限らない
- V は基底を持つとき, 基底のとり方は無数にある. ただし 基底の元の個数 (上の n) は一定である

例3 (重要) $V = \mathbb{R}^n$

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であることを示せ.

(1) $\underbrace{c_1\vec{e_1} + \cdots + c_n\vec{e_n}}_{= \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}} = \vec{0} \Longrightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0$

よって $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ は 1次独立.

(2) 任意の V の元 $\vec{w} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ に対して

$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\vec{e_1} + \cdots + c_n\vec{e_n}$ と表せる.

上と同じ式

よって $V = \langle \vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n} \rangle$

(1), (2) より $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底である □

これを $\mathbb{R}^n$ の標準基底 (standard basis) という

例4　V：ベクトル空間

$W = \langle \vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k} \rangle \subset V$

このとき、$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ が一次独立ならば、

$v_1, \cdots, v_k$ は Wの 基底になる。

☆次元

Def ベクトル空間Vが基底 $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ を持つとき、
その元の個数 k を Vの次元 (dimension) といい、
$\dim V$で表す

Remark：1. $V = \{\vec{0}\}$ は基底を持たないが $\dim V = 0$ と定める。

2. $V \neq \{\vec{0}\}$ で（有限個のベクトルからなる）基底を持たないものもある。このとき、$\dim V = \infty$ と定める。

（例：変数 xの数式（$3x^2+2x+1$ など）全体からなるベクトル空間）

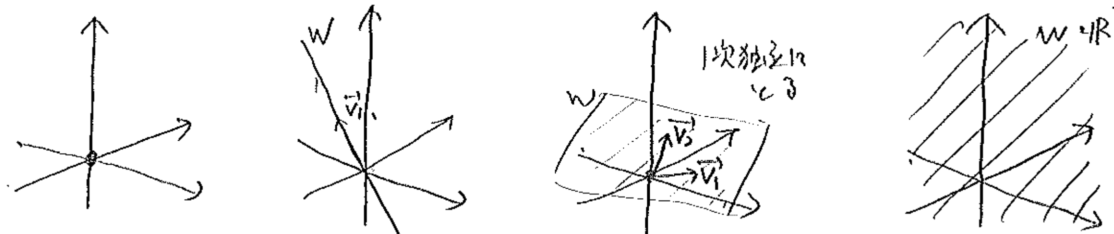
$\left.\begin{array}{l}\dim V = 0 \\ \dim V = k\end{array}\right\}$ 有限次元

$\dim V = \infty$ ：無限次元

例3（つづき）$\mathbb{R}^n$ は標準基底 $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ を持つので $\dim \mathbb{R}^n = n$.

例5　（Lect7の例2再考）

$V = \mathbb{R}^3$　W：Vの部分空間



$W = \{\vec{0}\}$　$\dim W = 0$

$W = \langle \vec{v_1} \rangle$　$\vec{v_1}$：Wの基底　$\dim W = 1$

$W = \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle$　$\vec{v_1}, \vec{v_2}$：Wの基底　$\dim W = 2$

$W = \mathbb{R}^3$　$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$：$W(=\mathbb{R}^3)$の基底　$\dim W = 3$