Lect 7 部分空間 / 1次独立

Review　V: ベクトル空間　（例: $\mathbb{R}^n$）

集合, 加法(和); $\vec{u}+\vec{v}$, スカラー倍; $c\vec{v}$

公理 (1) ~ (8) $\Longrightarrow$ 1次結合

$c_1\vec{u_1} + \cdots + c_n\vec{u_n}$

の和, 差, スカラー倍

目標　Vの次元 (dim V) を定義する.

1. 部分空間

Def. V: ベクトル空間, W: Vの部分集合

Wが

(1) $\vec{o} \in W$

(2) $\vec{u}, \vec{v} \in W \Longrightarrow \vec{u}+\vec{v} \in W$ (Wは加法について閉じている)

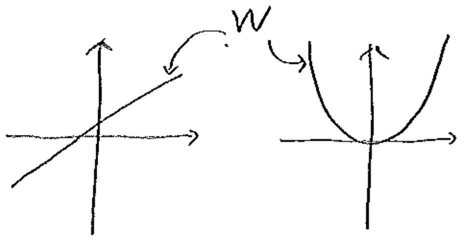
(3) $\vec{u} \in W,\ c \in \mathbb{R} \Longrightarrow c\vec{u} \in W$ (Wはスカラー倍について閉じている)

を満たすとき、Wは(Vの加法とスカラー倍により)ベクトル空間となる。WをVの部分空間(vector space)という。

Remark: 公理(1)〜(8)はVで満たされているので、Wでも自動的に満たされる。

例1 $V = \mathbb{R}^2$

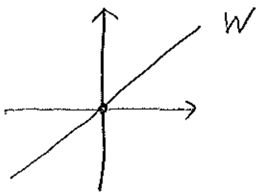
部分空間でない例



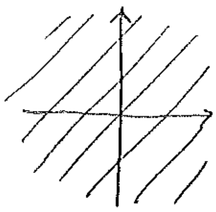
$\vec{o}$を含まない

加法, スカラー倍で閉じていない

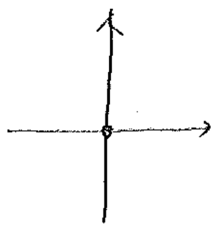
部分空間の例



原点を通る直線

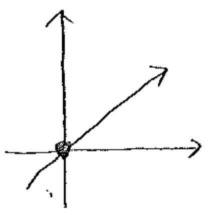


V

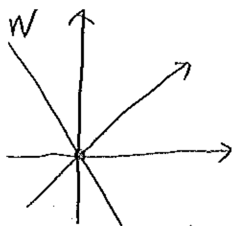


$\{\vec{o}\}$

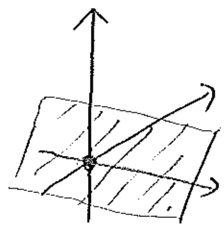
例2 $V = \mathbb{R}^3$



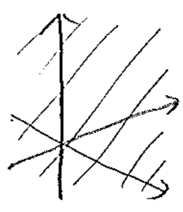
$\{\vec{o}\}$



原点を通る直線



原点を通る平面



V

例3 一般のベクトル空間 V において $W=\{\vec{0}\}$, V は V の部分空間である

☆ ベクトルの生成する部分空間

V: ベクトル空間

Def (重要) $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\in V$ に対して. V の部分集合

$$\langle \vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\rangle := \{c_1\vec{v_1}+\cdots+c_k\vec{v_k} \mid c_1,\cdots,c_k\in\mathbb{R}\}$$

($\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ の1次結合全体の集合)

は V の部分空間 となる. これを $\vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}$ の生成する(張る)部分空間 という.

~~~~~ の証明)

$W=\langle \vec{v_1},\cdots,\vec{v_k}\rangle$ とおく.

① $\vec{0}=0\vec{v_1}+\cdots+0\vec{v_k}\in W$

② 加法で閉じていること.

$\vec{w}=c_1\vec{v_1}+\cdots+c_k\vec{v_k}$

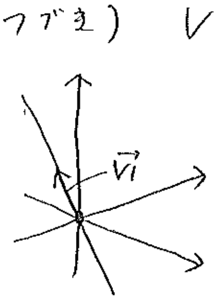
$\vec{w'}=c_1'\vec{v_1}+\cdots+c_k'\vec{v_k}$

とすると. $\vec{w}+\vec{w'}=(c_1+c_1')\vec{v_1}+\cdots+(c_k+c_k')\vec{v_k}$

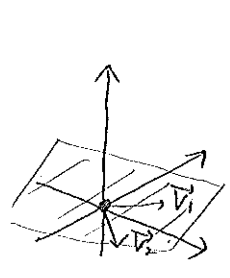
③ スカラー倍で閉じていること

(ex)

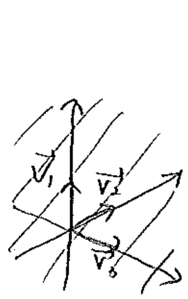
例2 (つづき) $V=\mathbb{R}^3$



$W=\langle\vec{v_1}\rangle$



$W=\langle\vec{v_1},\vec{v_2}\rangle$



$W=\langle\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\rangle$
~~~~~

2、1次独立

V：ベクトル空間

$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k} \in V$

$c_1, \cdots, c_k$についての方程式

(☆) $c_1\vec{v_1} + \cdots + c_k\vec{v_k} = \vec{0}$

を考える.

$$\underset{\vec{0}}{\underset{\shortparallel}{0\cdot\vec{v_1}}} + \cdots + \underset{\vec{0}}{\underset{\shortparallel}{0\cdot\vec{v_k}}} = \vec{0}$$

よって. $c_1 = \cdots = c_k = 0$ は解（(☆)の自明な解）

Def $\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ が 1次独立 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (☆)は自明な解しか持たない.

(linearly independent)

上の否定

$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_k}$ が 1次独立でない $\Longleftrightarrow$ (☆)は非自明な解を持つ

(1次従属)

（$c_1, \cdots, c_k$ のうち少くとも一つは0でない）

例4（重要） $V = \mathbb{R}^n$

$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく.

このとき.

$c_1\vec{e_1} + \cdots + c_n\vec{e_n} = \vec{0} \Longleftrightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0$

（自明な解）

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\shortparallel$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

よって. $\vec{e_1}, \cdots, \vec{e_n}$ は1次独立.

例5 $V=\mathbb{R}^2$ において

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ は1次独立か?

$c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = \vec{0}$ とする.

すなわち $\begin{pmatrix}2c_1+4c_2\\c_1+3c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}2c_1+4c_2=0\\c_1+3c_2=0\end{cases}$$

$-2c_2=0, \quad c_2=0, \quad c_1=0$

よって1次独立.

例6 $V=\mathbb{R}^2$ において.

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ は1次独立か?

$c_1\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ とする

すなわち $\begin{cases}2c_1+4c_2+5c_3=0 & \cdots ①\\c_1+3c_2-c_3=0 & \cdots ②\end{cases}$

$-2c_2+7c_3=0$

$\boxed{c_2=\frac{7}{2}c_3}$

②に代入 $c_1+\frac{21}{2}c_3-c_3=0$

$\therefore \boxed{c_1=-\frac{19}{2}c_3}$

①に代入. $-19c_3+14c_3+5c_3=0$. ①は満たされる

解 $\begin{cases}c_1=-\frac{19}{2}t\\c_2=\frac{7}{2}t\\c_3=t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ 非自明な解をもつ.

よって1次独立ではない