・Part 2　ベクトル空間と線形性

Lect 6. ベクトル空間

Part 1　集合と写像

Part 2　構造　準同型写像

例　ベクトル空間　線形写像

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ベクトル，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 行列.

1. ベクトル空間

☆ 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$

第1成分 etc.

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\text{個}} := \{ \underbrace{(v_1, \cdots, v_n)}_{n\text{個の組}} \mid v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R} \}$$

直積　　$\vec{v} = (v_i)$ とも書く.

例　$n=2$　2つの書き方の流儀．n次元数ベクトル (scalar vector)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = (v_1, v_2)$$

横ベクトル　　縦ベクトル　　いずれも数ベクトルとして同じもの

☆ 加法とスカラー倍

$\vec{u} = (u_i)$，$\vec{v} = (v_i) \in \mathbb{R}^n$，$c \in \mathbb{R}$

加法：　$\vec{u} + \vec{v} := (u_i + v_i)$　成分ごとに足す

スカラー倍：　$c\vec{u} := (c u_i)$　すべての成分を c 倍
(実数倍)

構造

Def 集合 $\mathbb{R}^n$ に上の加法とスカラー倍を合わせて考えたものを n次元数ベクトル空間という

---

n次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ に対して以下が成り立つ

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $a, b \in \mathbb{R}$

ベクトル空間の公理 (axiom)

加法
(1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ | (∵) 左辺 $=(u_i+v_i)=(v_i+u_i)=$ 右辺

(2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ | 同様

(3) (0ベクトルの存在) | $\vec{0}=(0)$ ← すべての成分が 0

$\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}$ となる $\vec{0}$ が存在

スカラー倍
(4) $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$ | 左辺 $=a(bu_i)=(abu_i)=$ 右辺

(5) $1(\vec{u})=\vec{u}$

(6) $0\vec{u}=\vec{0}$

加法とスカラー倍の関係
(7) $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$

(8) $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$

覚えなくて良いが、何度か書いて慣れること

Def 一般に集合 V において $\vec{u}, \vec{v} \in V$, $c \in \mathbb{R}$ に対して

和 $\vec{u}+\vec{v} \in V$

スカラー倍 $c\vec{v} \in V$

線形構造 (linear structure)

が定められて (1)〜(8) をみたすとき V をベクトル空間 (vector space)、V の元 $\vec{v}$ をベクトルという

ポイント① ベクトル空間は、線形構造を持つ集合のことである

例1 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ はベクトル空間である.

例2 変数 x, y の文字式 $x+2y^2$, $\sqrt{2}x^3+xy$, etc 全体の集合は文字式の和とスカラー倍によりベクトル空間となる

2. ベクトルの基本性質

☆ 1次結合

(1), (2)　n 個のベクトル $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_n}$ の和

$\vec{u_1} + \cdots + \vec{u_2}$

はその足し方の順に依存しない。

Def $\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_n} \in V$ に対し

$c_1\vec{u_1} + \cdots + c_n\vec{u_n} \in V$ を

$\vec{u_1}, \cdots, \vec{u_n}$ の 1次結合 (linear combination) という
線形

ポイント② 条件(1)〜(8)はベクトルの1次結合を文字式のように計算することを保証する

例　$3(2\vec{u}+\vec{v}) + 2(\vec{u}+(-4)\vec{v})$

$\overset{(7)}{=} (6\vec{u}+3\vec{v}) + (2\vec{u}+(-8)\vec{v})$

$\overset{(1),(2)}{=} (6\vec{u}+2\vec{u}) + (3\vec{v}+(-8)\vec{v})$

$\overset{(8)}{=} 8\vec{u}+(-5)\vec{v}$

$(= 8\vec{u} - 5\vec{v})$

☆ 0ベクトル

V: vector space

① 0ベクトルは一意的である。

Proof) $\vec{0}, \vec{0}'$ をともに0ベクトルとする。

$\vec{0}+\vec{0}' = \vec{0}'$　　$\therefore \vec{0} = \vec{0}'$ ☒

$= \vec{0}$

② $0\cdot\vec{u} = \vec{0}$, $c\vec{0} = \vec{0}$

Proof) $c\vec{0} = \vec{0}$ を示す。$c=0$ のときは公理(6)より成立。

$c \neq 0$ とする。任意の $\vec{u} \in V$ に対し。

$\vec{u} + c\vec{0} = c\left(\frac{1}{c}\vec{u}+\vec{0}\right) = c\left(\frac{1}{c}\vec{u}\right) = \vec{u}$

よって①の一意性より $c\vec{0} = \vec{0}$ ☒

③ 逆に $c\cdot\vec{u}=\vec{0} \Longrightarrow c=0$ または $\vec{u}=0$

Proof) $c=0$ のときは O.K.

$c\neq 0$ のときは、$\frac{1}{c}$ をかけて

$$\underbrace{\frac{1}{c}(c\cdot\vec{u})}_{=\vec{u}}=\underbrace{\frac{1}{c}\vec{0}}_{\overset{②}{=}\vec{0}},\quad よって\ \vec{u}=\vec{0}\ \blacksquare$$

☆ 逆ベクトル

Def ベクトル $\vec{v}\in V$ に対して

$\vec{v}+\vec{w}=0$

を満たす $\vec{w}\in V$ を V の逆ベクトル (inverse vector) といい

$-\vec{v}$ と表す.

---

④ $\vec{v}$ の逆ベクトルは存在するなら一意的

Proof) $\vec{w},\vec{w}'$ をともに $\vec{v}$ の逆ベクトルとする. このとき,

$$(\vec{w}+\vec{v})+\vec{w}'=\vec{0}+\vec{w}'=\vec{w}'$$
$$\|$$
$$\vec{w}+(\vec{v}+\vec{w}')=\vec{w}+\vec{0}=\vec{w}$$

よって $\vec{w}=\vec{w}'$ ■

⑤ $(-1)\vec{v}$ は $\vec{v}$ の逆ベクトルである.

Proof) $\vec{v}+(-1)\vec{v}=(1+(-1))\vec{v}=0\cdot\vec{v}=\vec{0}$ ■

すなわち, $-\vec{v}=(-1)\vec{v}$ である.

⑥ $-(c\vec{v})=(-1)(c\vec{v})=(-c)\vec{v}=c(-\vec{v})$

Proof) 最後の等式

$$c(-\vec{v})\overset{⑤}{=}c((-1)\vec{v})\overset{(4)}{=}(-c)\vec{v}\ \blacksquare$$

☆ ひき算

$$\vec{v}-\vec{w} := \vec{v} + (-\vec{w})$$
$$= \vec{v} + (-1)\vec{w}$$

例 前の例

$$8\vec{u} + \underbrace{(-5)\vec{v}}_{(-5\vec{v})} = 8\vec{u} - 5\vec{v}$$

例 $2(\vec{u}-3\vec{v}) - 3(2\vec{u}-\vec{v})$

$$= 2(\vec{u}+(-1)3\vec{v}) + (-1)3(2\vec{u}+(-1)\vec{v})$$
$$= 2\vec{u} - 6\vec{v} - 6\vec{u} + 3\vec{v}$$
$$= (-4)\vec{u} + (-3)\vec{v}$$

↓⑥　↓ひき算

$$= -4\vec{u} - 3\vec{v}$$

中学式の
文字式の計算でも
得られる.

☆ 移項

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{w} \iff \vec{u}=\vec{w}-\vec{v}$$

Proof) ($\Rightarrow$) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$ とする. 両辺に $-\vec{v}$ をたすと.

$$\underbrace{\vec{u} + \underbrace{\vec{v}+(-\vec{v})}_{\vec{0}}}_{\vec{u}} = \underbrace{\vec{w} + (-\vec{v})}_{\vec{w}-\vec{v}} \qquad \therefore \vec{u}=\vec{w}-\vec{v} \ ∎$$

($\Leftarrow$) $\vec{u}=\vec{w}-\vec{v}$ とする. 両辺に $\vec{v}$ をたすと.

$$\vec{u}+\vec{v} = \vec{w} \underbrace{-\vec{v}}_{+(-\vec{v})} + \vec{v} = \vec{w} \quad ∎$$

まとめ　一次結合に対して, 加法, スカラー倍, ひき算
移項が(中学式の)文字式の計算と同様の
ルールで行える.