Lect 5. 可算集合 (期末試験外)

1. 有限集合

素朴な定義

有限集合 (finite set)　元の個数が有限個 (自然数)

例: $\underset{2コ}{\{1, 2\}}$, $\underset{nコ}{\{1, 2, \cdots, n\}}$, $\underset{0コ}{\phi}$

無限集合 (infinite set)　元の個数が無限個 (=有限個でない)

写像による定義 (Cantor)

Def 集合 X が有限集合

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ・ある自然数 n とある全単射

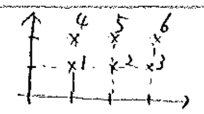
$f : \{1, \cdots, n\} \to X$ が存在する.

・または $X = \phi$

また、このとき、n (すなわち X の元の個数) を $|X|$ と表し、

X の濃度 (cardinality) という。

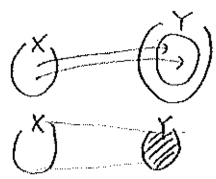
例 $X = \{1, 2, 3\} \times \{1, 2\}$



全単射 $f : \{1, \cdots, 6\} \to X$ を図で定める.　$|X| = 6$

ポイント① 全単射 f は X の元に番号を付ける (=数える)

有限集合 X, Y に対して以下が成り立つ



・ある単射 $f : X \to Y$ が存在 $\Longleftrightarrow |X| \leqq |Y|$

・ある全射 $f : X \to Y$ が存在 $\Longleftrightarrow |X| \geqq |Y|$

・ある全単射 $f : X \to Y$ が存在 $\Longleftrightarrow |X| = |Y|$

2. 無限集合の濃度

Def 有限集合でない集合を無限集合という

無限集合の「個数」を比べたい。
　　　　　　　-大きさ

アイデア：写像を用いる

無限集合 X に対して X の濃度 $|X|$ （数ではなく記号）
の等号と大小関係を以下で定める

Def 集合 X, Y に対して

① $|X| = |Y| \iff$ ある全単射 $f: X \to Y$ が存在

② $|X| \leqq |Y| \iff$ ある単射 $f: X \to Y$ が存在

　実は（$\iff$ ある全射 $f: Y \to X$ が存在）

例 $X = \mathbb{N}$, $Y = 2\mathbb{N} := \{2, 4, 6, \cdots\}$

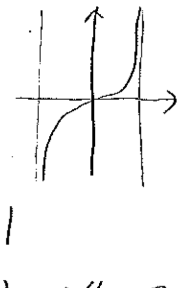
$$f: \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}$$
$$n \longmapsto 2n$$

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2, & 4, & 6, & 8 & \cdots \end{array}$$

は全単射なので $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$

ポイント② 無限集合においては、部分と全体の濃度が等しいことが起こり得る。

例 $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$
(Lect3)　　$x \longmapsto \tan x$



は全単射　$|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})| = |\mathbb{R}|$

同様に　$|(0, 1)| = |\mathbb{R}|$　（後で用いる）

3. 可算集合

目標：$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$の濃度の比較

Theorem $\mathbb{N}$は無限集合の中で濃度が最小の集合である。

Proof) Xを無限集合とする。このとき

写像 $f: \mathbb{N} \longrightarrow X$

を以下のように帰納的に定める。

$1 \longmapsto x_1$ （x_1はXの任意の元）

$2 \longmapsto x_2$ （x_2は$X-\{x_1\}$の任意の元）

$3 \longmapsto x_3$ （x_3は$X-\{x_1, x_2\}$の任意の元）

$\vdots$

Xは無限集合なので、この操作は終わらずに続けられる。また作り方よりfは単射である。

よって $|\mathbb{N}| \leq X$

（$|\mathbb{N}|$を$\underset{\text{アレフ}}{\aleph_0}$と表す） （書き順：＼，ヒ，$\aleph$）

Def 集合Xが可算集合 (countable set)

$\overset{def}{\iff} |X| = |\mathbb{N}| \quad (= \aleph_0)$

$\iff$ ある全単射 $f: \mathbb{N} \longrightarrow X$ が存在する

全単射 f：  ← 通し番号が付けられる
（＝数えられる） 可算

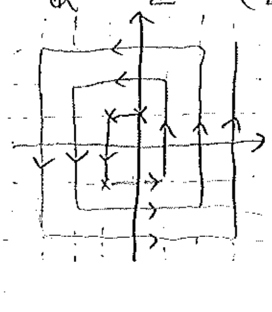
Prop $\mathbb{Z}$は可算集合である。（すなわち $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$）

$\mathbb{Z}$: $\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$

$\mathbb{N}$: $\cdots, 5, 3, 1, 2, 4, \cdots$

Prop $\mathbb{Q}$は可算集合である。

$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\}) / \sim$ （先週）

 ← 同値なものは飛ばしながら数えていく

Theorem　$\mathbb{R}$は可算集合ではない（すなわち $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$）

Proof)　$|(0,1)| = |\mathbb{R}|$ なので $(0,1)$ は可算集合でないことを示す

Cantorの対角線論法

背理法で示す。$(0,1)$ が可算集合とする。

すると、$(0,1)$ の元は $a_1, a_2, \cdots$ と番号がつけられる

各 a_n を無限小数点表示をして並べると

$$a_1 = 0.b_1 * * \cdots$$
$$a_2 = 0.* b_2 * \cdots$$
$$a_3 = 0.* * b_3 \cdots$$

となる各 n に対して $c_n = \{0, \dots, 9\}$ を

$c_n \neq b_n$ となるように選ぶ。すると実数

$$c = 0.c_1 c_2 c_3 \cdots$$

は a_n と小数第 n 位が異なる。

したがって c はどの a_n とも一致しない

これは矛盾 □

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{非可算}}}{\mathbb{R}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{可算}}}{\mathbb{Q}} \sqcup \{\text{すべての無理数}\}$$

⇒ 非可算（考えよ！）

ポイント③　有理数より無理数の方が（とても）「多い」
