Lect 4. 同値関係と商集合

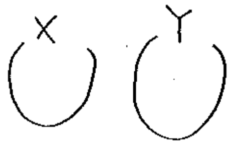
Warm up

直和 $X \sqcup Y$ の定義は？

・和 $X \cup Y = \{x \mid x \in X$ または $x \in Y\}$

特に $X \cap Y = \phi$ のとき、

和 $X \cup Y$ を直和といい、$X \sqcup Y$ と表す



よくある間違い

「XとYについての条件」

$X \sqcup Y = \{x \mid x \in X$ または $x \in Y,\ X \cap Y = \phi\}$

「xについての条件」を書く

今日のテーマ　商集合、集合の構成法

キーワード　1. 同値関係 $\sim$ ／ 2. 同値類 $\Big\} \Longrightarrow$ 3. 商集合 $X/\sim$

1. 同値関係

例1　$\mathbb{Z}$：整数全体の集合　　$a=3n+r$ ←余り

$n\in\mathbb{Z}$, $r=0,1,2$

$a,b\in\mathbb{Z}$ に対して

$a\sim b \overset{def}{\iff}$ (aを3で割った余り)

$\sim$：tilde (チルダ)　　$=$ (bを3で割った余り)

(否定：$a\not\sim b$) $\iff$ $a-b$ は3の倍数

$$\left.\begin{array}{l} \cdots\sim-6\sim-3\sim0\sim3\sim6\sim\cdots \\ \cdots\sim-5\sim-2\sim1\sim4\sim7\sim\cdots \\ \cdots\sim-4\sim-1\sim2\sim5\sim8\sim\cdots \end{array}\right\}$$ $\mathbb{Z}$が3つのグループに分かれる

$0\not\sim1$ etc….

上の $\sim$ は次の3つの性質をもつ　　|$a\sim b$を「aはbと仲間」とたとえると

覚えよう！
- ① $a\sim a$ (反射律) | 自分自身は仲間
- ② $a\sim b \iff b\sim a$ (対称律) | 仲間は互いに仲間
- ③ $a\sim b,\ b\sim c \iff a\sim c$ (推移律) | 仲間の仲間は仲間

一般に、

Def (空でない) 集合Xの任意の元 a, b に対して
$a\sim b$ または $a\not\sim b$ の一方かつ一方のみが成り立ち、
上の①, ②, ③ が成り立つとき、$\sim$をXの同値関係 (equivalence relation) という。また、$a\sim b$のとき aはbと同値 (equivalent) という
(aとbは同値) ⟸ ②より

ポイント① 同値関係とは、集合のグループ分け (分割) のルールの間接的な与え方である。

(例：同じ高校出身, 好きなもの同士)

↑ 同値関係　　↑ 同値関係でない

Ex $\mathbb{R}$において、$a, b \in \mathbb{R}$としたとき、

$a \sim b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a-b \in \mathbb{Q}$

と定めると $\sim$ は $\mathbb{R}$ の同値関係になるか？

①：$a-a=0 \in \mathbb{Q}$　よって $a \sim a$.

②：$a \sim b$ とする。このとき $a-b \in \mathbb{Q}$

すると $b-a=-(a-b) \in \mathbb{Q}$. よって $b \sim a$.

③：$a \sim b$, $b \sim c$ とする　このとき $a-b \in \mathbb{Q}$, $b-c \in \mathbb{Q}$

すると $a-c=(a-b)+(b-c) \in \mathbb{Q}$　よって $a \sim c$.

よって $\sim$ は同値関係

☆ 集合の分割

Def ① 集合：$A_1, A_2, \cdots$　　（無限個でもよい）

和　$A_1 \cup A_2 \cup \cdots := \{x \mid$ ある i に対して $x \in A_i\}$

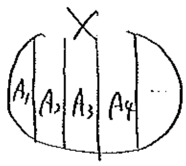
さらに、$i \neq j$ に対して $A_i \cap A_j = \phi$ を満たすとき、

和を直和といい、$A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots$ と表す。

② $A_1, A_2, \cdots \subset X$ に対して、

$X = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots$　と表せるとき、

$A_1, A_2, \cdots$ を <u>X の分割</u> という



例1（つづき）　$X=\mathbb{Z}$, $a \sim b \Leftrightarrow a-b$ は 3の倍数

$\bar{0} := \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 0\} = \{\cdots, -3, 0, 3, \cdots\}$

$\bar{1} := \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 1\} = \{\cdots, -2, 1, 4, \cdots\}$

$\bar{2} := \{a \in \mathbb{Z} \mid a \sim 2\} = \{\cdots, -1, 2, 5, \cdots\}$

このとき、$\mathbb{Z} = \bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2}$　かつ　$\bar{0} \cap \bar{1} = \bar{1} \cap \bar{2} = \bar{0} \cap \bar{2} = \phi$

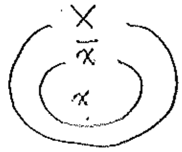
すなわち　$\mathbb{Z} = \bar{0} \sqcup \bar{1} \sqcup \bar{2}$

主張（§2で示す）　Xの同値関係はXの分割を定める。

2. 同値類

$\sim$ を X の同値関係とする

Def $x \in X$ に対して $\overline{x} = \{ y \in X \mid y \sim x \}$ を
x の同値類 (equivalence class) という



ポイント② 同値類 $\overline{x}$ は X の部分集合である

例1 (つづき)

異なる同値類は3つ

$$\begin{cases} \overline{0} = \{ \cdots, -3, 0, 3, \cdots \} = \overline{3} = \overline{-3} = \cdots \\ \overline{1} = \overline{4} = \overline{-2} = \cdots \\ \overline{2} = \overline{5} = \overline{-1} = \cdots \end{cases}$$

一般に、

Prop $x, y \in X$ に対して

(1) $x \in \overline{x}$

(2) $x \sim y \iff \overline{x} = \overline{y}$

(3) $x \not\sim y \iff \overline{x} \cap \overline{y} = \phi$

わかること。
x を含む同値類が存在。
異なる同値類は交わらない。

Proof) (1) $x \sim x$. よって $x \in \overline{x}$.

(2) ($\Rightarrow$) $x \sim y$ とする。
$\overline{x} \subset \overline{y}$ を示す。$z \in \overline{x}$ とすると $z \sim x$
よって $z \sim y$ よって $\overline{x} \subset \overline{y}$
$\overline{y} \subset \overline{x}$ も同様。 ③ 交換律も用いる。

($\Leftarrow$) $\overline{x} = \overline{y}$ とする。すると $x \in \overline{x}$ より $x \in \overline{y}$
よって $x \sim y$.

(3) 対偶： $x \sim y \iff \overline{x} \cap \overline{y} \neq \phi$ を示す。

($\Rightarrow$) $x \sim y$ とする。すると $x \in \overline{x}$ かつ $x \in \overline{y}$
よって $x \in \overline{x} \cap \overline{y} \neq \phi$.

($\Leftarrow$) $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \phi$ とする。するとある $z \in \overline{x} \cap \overline{y}$ が存在する。
このとき、$z \sim x$, $z \sim y$, よって $x \sim y$.

上のPropより

Theorem X の異なる同値類全体 $A_1, A_2, \cdots$ は X の分割を与える

3. 商集合

Def. 集合 X の同値関係 $\sim$ に対し、

$$X/\sim \; := \{\overline{x} \mid x \in X\}$$

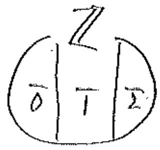
すなわち、$\sim$ による（異なる）同値類全体の集合を
$\sim$ による X の <u>商集合</u>（quotient set）という。

例1（つづき）

$$\mathbb{Z}/\sim \; = \{\overline{x} \mid x \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

繰り返しは無視!



有理数体の構成（資料）