Lect 3 集合と写像

warm up

1-4 (2)　$A-B=A \iff A\cap B=\phi$

$(\Rightarrow)$　$A-B=A$ とする

いま、$x\in A\cap B$ とすると　$x\in B$ である

一方、$x\in A=A-B$ より、$x\notin B$

よって そのような x は存在しない。よって　$A\cap B=\phi$

$(\Leftarrow)$　$A\cap B=\phi$ とする

・$A-B\subset A$ について

$x\in A-B$ とすると、$x\in A$ である　よって $A-B\subset A$

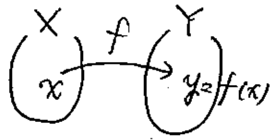
・$A\subset A-B$ について

$x\in A$ とする　このとき　$A\cap B=\phi$ より　$x\notin B$.

よって $x\in A-B$。すなわち $A\subset A-B$ ∎

1. 写像

Def X, Y：集合



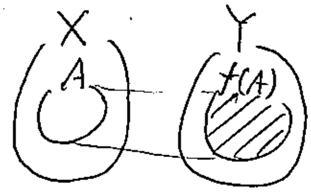
Xの各元にYの元を対応させる
規則fをXからYへの写像(map)といい、
$f: X \to Y$，あるいは $X \xrightarrow{f} Y$
と表す. また、$x \in X$に対応する元を$f(x)$と表し.
fによるxの像(image)という.

記号：$y = f(x)$のとき.
$f: x \mapsto y$，$x \overset{f}{\longmapsto} y$ と表す.

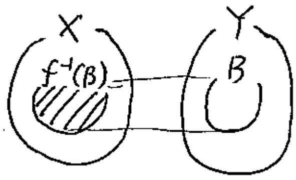
☆部分集合の像と逆像

写像 $f: X \to Y$ に対して.

① $A \subset X$ に対して
$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset Y$
fによるAの像



② $B \subset Y$ に対して
$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$
fによるBの逆像



特に $B = \{y\}$ （1つの元からなる集合）のとき.
$f^{-1}(\{y\})$ を $f^{-1}(y)$ と表すことも多い.

重要（ポイント①）記号f^{-1}には逆像と（後で述べる）逆写像の2つの異なる意味がある。（正確に使いわけよ）

ポイント②（写像の機能1）写像を用いて集合（像と逆像）を構成できる.

☆定義域と値域

$f: X \to Y$に対して
- Xをfの定義域(domain)という
- fの値域(range)には2つの流儀がある.

	Y	$f(X)$ (Imfとも表す)	
①	値域	fの像	この講義
②	なし	値域	高校

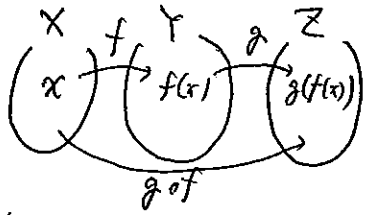
2. 写像の合成

Def $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$

に対して、合成 (composition)

順序に注意→ $g \circ f : X \longrightarrow Z$

を $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ により定める。



(proposition：定理)

Prop 1 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ に対して

結合則： $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

Proof) $x \in X$ に対して両辺の像が一致することを示す。

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$$ ◻

Def 写像

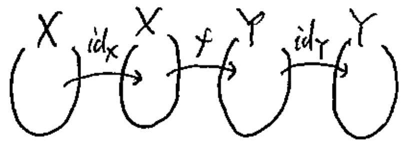
$$id_X : X \to X$$
$$x \mapsto x$$

(自分自身を対応させる)

を恒等写像 (identity map) という

Prop2 写像 $f : X \to Y$ に対して

$$\begin{cases} (1) & f \circ id_X = f \\ (2) & id_Y \circ f = f \end{cases}$$



Proof) (1) $(f \circ id_X)(x) = f(id_X(x)) = f(x)$.

(2) 上と同様 ◻

3. 単射, 全射, 全単射

$f: X \to Y$ とする.

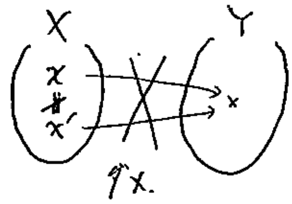
Def ① f が単射 (injection)

$\overset{def}{\iff}$ $x, x' \in X$ に対して $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

$\overset{対偶}{\iff}$ $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$\iff$ 任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる

$x \in X$ が存在するならば一意的　　(A)

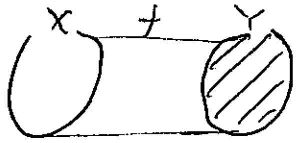


② f が全射 (surjection)

$\overset{def}{\iff}$ $f(X) = Y$

$\iff$ 任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる

$x \in X$ が存在する　　(B)



③ f が全単射 (bijection)

$\overset{def}{\iff}$ f が全射かつ単射

$\overset{(A)+(B)}{\iff}$ 任意の $y \in Y$ に対して $f(x) = y$ となる

$x \in X$ が一意的に存在する　　(C)

☆逆写像

重要 (ポイント③)

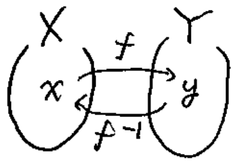
Def $f: X \to Y$ は全単射とする。

このとき、任意の $y \in Y$ に対して、(C) より

一意的に定まる x を対応させる

写像 $f^{-1}: Y \to X$ を f の逆写像 (inverse map) という

定義より　$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$　(良く用いる)



Prop 3 $f: X \to Y$ が全単射のとき

(1) $f^{-1} \circ f = id_X$　(2) $f \circ f^{-1} = id_Y$

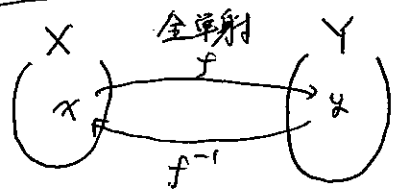
Proof) (1) $x \in X$ に対し $f(x) = y$ とおく

このとき $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = id_X(x)$

(2) $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y) = x$ とおく

このとき $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = id_Y(y)$ ∎

☆全単射の意義



X と Y の元の「ペア」が定まる.

これを以下のように表現する

「全単射 $f: X \to Y$ は X と Y の間の 1対1 対応
(one-to-one correspondence) を与える」

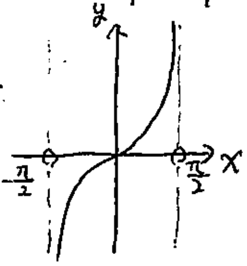
ポイント④ (写像の機能2)

構造を無視する

全単射 $f: X \to Y$ は X と Y の「集合としての」
同一視 (identification) を与える

例1　$X = \{1, 2, 3\}$
　　　$\;\;\;\;\;\;\;\;\;\updownarrow\;\updownarrow\;\updownarrow$　元の名前のつけ方の違い
　　　$Y = \{a, b, c\}$

例2



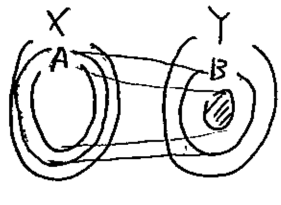
$y = \tan x$

$f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$　は全単射
$\quad x \longmapsto \tan x$

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ と $\mathbb{R}$ は集合として同一視できる.

例題　Ex 3-2 (1)

$f(A) \subset B \iff A \subset f^{-1}(B)$



($\Rightarrow$) $f(A) \subset B$ とする

$x \in A$ とすると、$f(x) \in f(A)$. よって 仮定より

$f(x) \in B$　すなわち. $x \in f^{-1}(B)$　よって $A \subset f^{-1}(B)$.

($\Leftarrow$) $A \subset f^{-1}(B)$ とする

$y \in f(A)$ とすると, $f(x) = y$ となる $x \in A$ が存在する.

このとき、仮定より. $x \in f^{-1}(B)$.

すなわち. $f(x) \in B$. よって $y \in B$. 以上より $f(A) \subset B$ ∎.