Lect 2 集合の構成法

1. 集合

☆集合

Def (definition, 定義)

数学的な対象の集まりを集合 (Set) という

(数, 変数 などから何らかの方法で構成したもの)

すなわち、X を集合とするとき、任意の(数学的な対象) x に対して

$$x \in X \quad \text{または} \quad x \notin X$$

の一方かつ一方のみ (one and only one) が成り立つ.

$x \in X$ のとき、x は X に属するといい

x を X の元, 要素 (element) という.

Def 元を一つも持たない集合を空集合 (empty set) といい、

ϕ, $\{\ \}$ と表す. すなわち 任意の x に対して $x \notin \phi$

Remark ϕ : ギリシャ語の「ファイ」ではなく ノルウェー語の アルファベット

Bourbaki による記号

☆集合の表し方

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 具体的に並べる

($\mathbb{N}$, N とも書く) $\mathbb{N} = \{x \mid x \text{は自然数}\}$ 条件で表す

$\mathbb{N}$ は 自然数全体の集合

$\mathbb{N}$ は すべての自然数の集合 } 文章で表す

($\mathbb{N}$ is the set of all the natural numbers.)

比較 X は自然数の集合 (全体とは限らない 例 $X = \{1, 2, 3\}$)

(X is a set of natural numbers.)

同様に $\mathbb{Z} = \{x \mid x \text{は整数}\}$

$\mathbb{Q} = \{x \mid x \text{は有理数}\} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ かつ } p \neq 0\}$ (and (かつ))

$\mathbb{R} = \{x \mid x \text{は実数}\}$

良く用いる $A = \{x \in X \mid x \text{の満たす条件}\}$ 例 $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leqq 1\} = \{1\}$

★ 部分集合

Def 集合 A, X に対して、条件

明らかな場合 省略される事が多い

(1): (任意の x に対して) $x \in A$ ならば $x \in X$

が成り立つとき A を X の部分集合 (subset) といい、

$A \subset X$ と表す

例 $\phi \subset X$, $X \subset X$

Remark この講義では $A \subseteq X$ という記号は用いない

ポイント① 記号 $\in$, $\subset$ を正確に使いわけよ

例: $1 \in N$, $\{1\} \subset N$

ポイント② $A \subset X$ を示すには (1) を示せば良い

Ex $A \subset B$, $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$ を示せ.

☺ (任意の x に対して) $x \in A$ とすると $A \subset B$ より $x \in B$,

さらに $B \subset C$ より $x \in C$ よって $A \subset C$ ☒

★ 集合が等しいこと

$A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 2\}$ は等しいとみなす. 例: $Q = \{\frac{q}{p} \mid p, q \in \mathbb{Z}, p \neq 0\}$

(同じ元は何度書いても関係ない) $\frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{-4}{-3} = \cdots$

これを定義として明確に述べる.

Def 集合 A, B に対して (任意の x に対して)

$A = B \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (2): $x \in A \Longleftrightarrow x \in B$ (が成り立つ)

(左を右で定義)

$\Longleftrightarrow$ 「$x \in A \Rightarrow x \in B$」かつ「$x \in B \Rightarrow x \in A$」

Lect1

$\Longleftrightarrow$ (3): $A \subset B$ かつ $B \subset A$

ポイント③ $A = B$ を示すのに (2), (3) の2つの choice がある

2、集合の構成法

ポイント④ 集合は数学における「世界」,「組織」である

・何もないところから意味のある集合を作るのは難しい

・$\mathbb{N}$からいろいろな方法で集合を構成する.

・小さいものから大きなものを作る.

・大きいものから複雑なものを取り出す.

X, A, B : 集合とする.

① 部分集合 $A \subset X$

$A = \{x \in X \mid x$ に関する条件$\}$

② 補集合 (complement)

$A \subset X$ に対して (⟸ 重要!)

$A^c := \{x \in X \mid x \notin A\}$ (Aの(Xにおける)補集合)

左辺を右辺で定義　　$x \in A$でない

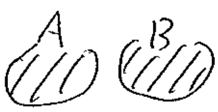
注意: $A^c := \{x \mid x \notin A\}$ではない!

③ 交わり (intersection)

$A \cap B := \{x \mid x \in A$ かつ $x \in B\}$

④ 和 (union)

$A \cup B := \{x \mid x \in A$ または $x \in B\}$



特に $A \cap B = \emptyset$ のとき,

$A \cup B$ を $A \sqcup B$ と表す (直和, 非交和, disjoint union)

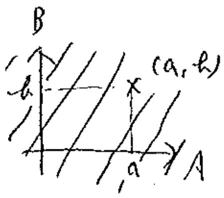
⑤ 差 (difference)

$A - B := \{x \in A \mid x \notin B\}$

($A \setminus B$ とも表す)

⑥ 直積, 積 (product)

$A \times B := \{\underbrace{(a, b)}_{\text{順序対}} \mid a \in A, b \in B\}$

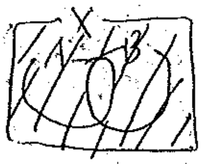


☆基本性質 (Ex)

(1) 結合則 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(2) 分配則 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(3) De Morgan の法則 $A, B \subset X$ に対して $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$



Proof) ポイント③ 方針 (2)

(1) (任意の x に対して)

$x \in (A \cap B) \cap C \iff x \in A \cap B$ かつ $x \in C$

$\iff$ 「$x \in A$ かつ $x \in B$」かつ $x \in C$

「かつ」の結合則 (Lect 1) $\iff$ $x \in A$ かつ「$x \in B$ かつ $x \in C$」

$\iff x \in A$ かつ $x \in B \cap C$

$\iff x \in A \cap (B \cap C)$

(2) $x \in (A \cup B) \cap C \iff x \in A \cup B$ かつ $x \in C$

$\iff$ 「$x \in A$ または $x \in B$」かつ $x \in C$

$\iff$ 「$x \in A$ かつ $x \in C$」または「$x \in B$ かつ $x \in C$」

$\iff x \in A \cap C$ または $x \in B \cap C$

$\iff x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$

(3) (任意の) $x \in X$ に対して

$x \in (A \cap B)^c \iff x \notin A \cap B$

$\iff$ 「$x \in A \cap B$」でない

$\iff$ 「$x \in A$ かつ $x \in B$」でない

$\iff$ 「$x \in A$ でない」または「$x \in B$ でない」

$\iff$ 「$x \notin A$」または「$x \notin B$」

$\iff x \in A^c$ または $x \in B^c$

$\iff x \in A^c \cup B^c$

ポイント⑤ 集合の構成の基礎に数理論理がある。