Lect 12 連立一次方程式

1. 全射と単射

$f: V \to W$ 線形写像

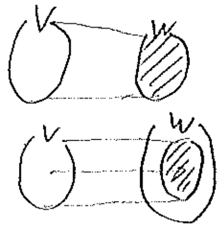
Lect 11

$\mathrm{Im} f \begin{cases} ① \dim \mathrm{Im} f \leqq \dim W, \\ ② f\text{が全射} \iff \dim \mathrm{Im} f = \dim W \end{cases}$

$\mathrm{Ker} f \begin{cases} ③ \dim \mathrm{Ker} f \leqq \dim V \\ ④ f\text{が単射} \iff \dim \mathrm{Ker} f = 0 \end{cases}$

次元定理 $\begin{cases} ⑤ \dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim V \\ ⑥ \text{特に} \dim \mathrm{Im} f \leqq \dim V \end{cases}$

これらより



Prop 1
(1) fが全射 $\Longrightarrow \dim V \geqq \dim W$
(2) fが単射 $\Longrightarrow \dim V \leqq \dim W$
(3) fが全単射 $\Longrightarrow \dim V = \dim W$

Proof) (1) fが全射 $\overset{②}{\Longrightarrow} \dim \mathrm{Im} f = \dim W$
⑥より $\dim \mathrm{Im} f \leqq \dim V$
したがって $\dim V \geqq \dim W$

(2) fが単射 $\overset{④}{\Longrightarrow} \dim \mathrm{Ker} f = 0$
$\overset{⑤}{\Longrightarrow} \dim \mathrm{Im} f = \dim V$
①より $\dim \mathrm{Im} f \leqq \dim W$
したがって $\dim V \leqq \dim W$

(3) (1)と(2)より $\dim V = \dim W$ ▨

比較 : X, Y : (ただの) 有限集合
(Lect 5) $f: X \to Y$ (ただの) 写像
(1) fが全射 $\Longrightarrow |X| \geqq |Y|$ ←元の個数
(2) fが単射 $\Longrightarrow |X| \leqq |Y|$
(3) fが全単射 $\Longrightarrow |X| = |Y|$

2. 連立一次方程式

例　(1)　$2x = 3$　　$(ax = b)$

(2) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$

行列で表す　$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

← 係数並べた

一般の連立方程式

n 変数　$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$A = m\left\{\overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}^{n}\right. \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \vec{b}$$

m 個の方程式

あるいは　$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$　(☆)

$(ax = b)$ と同じ形

例1　$ax = b$　　$x = \begin{cases} \frac{b}{a} & a \neq 0 \\ \text{任意} & a = 0,\ b = 0 \\ \text{解なし} & a = 0,\ b \neq 0 \end{cases}$

例2　$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 & ① \\ x_2 + x_3 = 1 & ② \end{cases}$

① − 2×②　　$x_1 - 3x_3 = 0$

$x_3 = t$ とおくと　$\begin{cases} x_1 = 3t \\ x_2 = 1 - t \ (\text{②より}) \\ x_3 = t \end{cases}$　　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ← 解は無数にあるが任意ではない

一般に　A：正方行列 ($n \times n$ 行列) が逆行列 A^{-1} を持つなら

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow (\underbrace{A^{-1}A}_{I\text{：単位行列}})\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

($x = \frac{b}{a}$ の一般化)

(一意的に解が求まる)

Question　一般の場合の解のパターンを求めよ

3. 解の構造

A : $m\times n$ 行列

(*) $A\vec{x}=\vec{b}$

の解を求める.

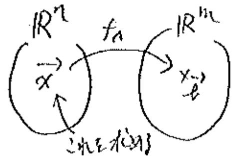
$\overset{\text{アイデア}}{\Longrightarrow}$ $f_A(\vec{x})=\vec{b}$ となる $\vec{x}$ を求める.

(写像 f_A の問題と思う)

Aの定める線形写像 (Lec 9)

$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

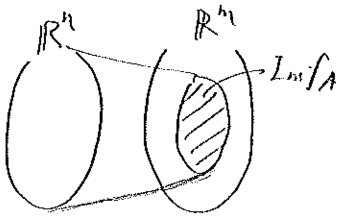
$\vec{x} \longmapsto A\vec{x}$



① 解の存在

(*)が解をもつ $\Longleftrightarrow$ $\vec{b}\in \mathrm{Im} f_A$

f_Aが全射 $\Longrightarrow$ 任意の$\vec{b}$に対して
(*)の解は存在する

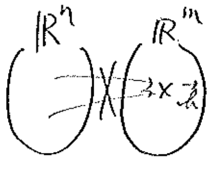


f_Aが全射でない $\Longrightarrow$ $\dim \mathrm{Im} f_A < m$
"ほとんどの" $\vec{b}$ に対して
(*)の解は存在しない

(例1. $\begin{cases} ax=b \\ a=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $b=0$ 以外は解を持たない)

② 解の一意性

f_Aが単射 $\Longrightarrow$ (*)の解は存在するなら
一意的



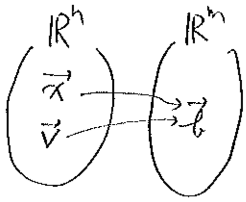
③ 解の構造

仮定: $\begin{cases} f_A : \text{単射でない} \\ \text{(*)は少なくとも一つの解(特解)} \vec{v} \text{ をもつとする} \end{cases}$

一般解 $\vec{x}$ を求める

$f_A(\vec{x})=f_A(\vec{v}) \Longleftrightarrow f(\vec{x}-\vec{v})=0$

$\Longleftrightarrow \vec{x}-\vec{v}\in \mathrm{Ker} f_A$



よって $\underset{\text{一般解}}{\vec{x}} = \underset{\text{特解}}{\vec{v}} + \vec{w}$ $\quad(\vec{w}\in \mathrm{Ker} f_A)$

あるいは $\dim \mathrm{Ker} f_A = l$ として. $\mathrm{Ker} f_A$の基底を$\vec{w}_1,\cdots,\vec{w}_l$ とすると

$\vec{x}=\vec{v}+t_1\vec{w}_1+\cdots+t_l\vec{w}_l$ と表される.

例2 (つづき)

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

解: $$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}}_{\text{特解}}+t\underbrace{\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}}_{\mathrm{Ker}\, f_A \text{の基底}} \qquad \left(\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right)$$

解の構造 (つづき)

$$A = m\Big\{\overbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}}^{n}, \quad A\vec{x}=\vec{b}$$

n: 変数の数
m: 方程式の数

$$f_A : \underset{V}{\overset{\|}{\mathbb{R}^n}} \longrightarrow \underset{W}{\overset{\|}{\mathbb{R}^m}}$$

(1) $m < n$ のとき

$\dim V > \dim W \xRightarrow{\text{Prop 1}} f_A$ は単射でない

$\Longrightarrow$ 解が存在するなら無限個

解の自由度 $\dim \mathrm{Ker}\, f_A = n - \dim \mathrm{Im}\, f_A \geq n-m$

(2) $m > n$ のとき

$\dim V < \dim W \Longrightarrow f_A$ は全射でない

$\Longrightarrow$ ほとんどの $\vec{b}$ に対して解なし.

(3) $m = n$ のとき

f_A は全射 $\Longleftrightarrow$ f_A は単射 $\Longleftrightarrow$ f_A は全単射

$$\vec{x} \underset{A^{-1}}{\overset{A}{\rightleftarrows}} \vec{b}$$

次元定理 $\underbrace{\dim \mathrm{Im}\, f_A}_{=\dim W} + \underbrace{\dim \mathrm{Ker}\, f_A}_{=0} = \dim V$

このとき、逆行列 A^{-1} が存在する.

まとめ: ・連立一次方程式の解を具体的に求めることはできる(掃き出し法)
・ここでは背後にある「線形性」にもとづいて解の一般形を導出した.(解の構造を理解した)

Part 1.2 まとめ

1. 集合と写像が現代数学の基本的手法であること
2. 「数学的に理解する」とはどのようなことか (背景にある構造を見抜く)

次回：「実数とは何か」

intro

中学／高校

実数 $\begin{cases} \text{有理数（分数）} = \text{循環小数} & \frac{1}{3} = 0.33\cdots,\ \frac{1}{2} = 0.50\cdots \ (= 0.499\cdots) \\ \text{無理数} = \text{非循環小数} & \sqrt{2} = 1.414\cdots,\ \pi = 3.14\cdots \end{cases}$

基本性質

① 数直線

$\longrightarrow$ 連続，すき間がない

② a, b：実数

$a+b$, $a \cdot b$.

③ $0.999\cdots = 1.00\cdots (=1)$

これらは明らかか？

たとえば

$\sqrt{2}+\pi$ ：
$$\begin{array}{r} 1.414\cdots \\ +)\ 3.141\cdots \\ \hline ? \end{array}$$

$\sqrt{2}\times\pi$ ：
$$\begin{array}{r} 1.414 \\ \times)\ 3.141 \\ \hline ? \end{array}$$