Lect 11 次元定理

Review ① 同型写像 $f: V \to W$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ・全単射

・線形写像

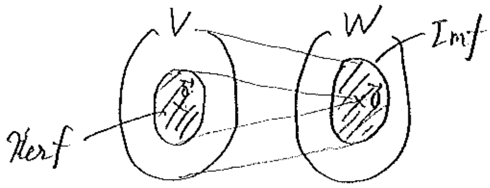
同型 $V \cong W$

$\dim V = n$, $\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_n}$: Vの基底

$f: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ は同型写像

$\underset{c_1\vec{a_1}+\cdots+c_n\vec{a_n}}{\overset{\shortparallel}{\vec{v}}} \longmapsto \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$　　よって $V \cong \mathbb{R}^n$

② $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$



1. $\mathrm{Ker} f$ と $\mathrm{Im} f$ (つづき)

準備

Prop1 V: 有限次元ベクトル空間

$W \subset V$: 部分空間

(1) $\dim W \leqq \dim V$

(2) $\dim W = \dim V \iff W = V$

Proof) 略

$f: V \to W$ 線形写像

☆全射と $\mathrm{Im} f$

f は全射 $\iff \mathrm{Im} f = W$

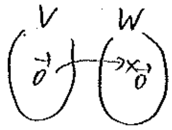
$\underset{\text{Prop1(2)}}{\iff} \dim \mathrm{Im} f = \dim W$

☆単射と $\mathrm{Ker} f$

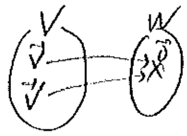
Prop2 f が単射 $\iff \mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$

Proof) ($\Longrightarrow$) $f(\vec{0}) = \vec{0}$ なので単射性より

$\mathrm{Ker} f = \{\vec{0}\}$



($\Longleftarrow$) (こちらが非自明)



$\vec{v}, \vec{v}' \in V$, $f(\vec{v}) = f(\vec{v}')$ とする

このとき $f(\vec{v}) - f(\vec{v}') = \vec{0}$

線形性より $f(\vec{v} - \vec{v}') = \vec{0}$

すなわち $\vec{v} - \vec{v}' \in \mathrm{Ker} f$

仮定より $\vec{v} - \vec{v}' = \vec{0}$ $\therefore \vec{v} = \vec{v}'$ □

特に $\boxed{f \text{ は単射} \iff \dim \mathrm{Ker} f = 0}$

Prop 3 $\begin{cases} f: V \to W : \text{線形写像} \\ \vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n} : V\text{の基底} \end{cases}$

$\Longrightarrow \mathrm{Im}\, f = \langle f(\vec{v_1}), \cdots, f(\vec{v_n}) \rangle$

Proof) Vの任意の元$\vec{v}$は

$\vec{v} = c_1\vec{v_1} + \cdots + c_n\vec{v_n}$

と表される。このとき

$f(\vec{v}) = f(c_1\vec{v_1} + \cdots + c_n\vec{v_n})$

$= c_1 f(\vec{v_1}) + \cdots + c_n f(\vec{v_n})$ ▨

例1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\vec{v} \mapsto A\cdot\vec{v}$

$\begin{cases} \dim \mathrm{Im}\, f_A \\ \dim \mathrm{Ker}\, f_A \end{cases}$ を求めよ.

- $\mathrm{Im}\, f_A \underset{\text{Prop2}}{=} \langle f(\vec{e_1}), f(\vec{e_2}) \rangle$

$\underset{\text{行列の正体}}{=} \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$と$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$は1次独立か?

$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} c_1 + 3c_2 \\ 2c_1 + 4c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} c_1 + 3c_2 = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$ ∴1次独立

よって. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$は$\mathrm{Im}\, f_A$の基底なので $\dim \mathrm{Im}\, f_A = 2$
(よってf_Aは全射)

- $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, f_A \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{pmatrix} v_1 + 3v_2 \\ 2v_1 + 4v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overset{\text{上と同じ}}{\iff} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって $\mathrm{Ker}\, f_A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ より $\dim \mathrm{Ker}\, f_A = 0$
(よって f_Aは単射)

2. 次元定理

Theorem 4 $\begin{cases} f: V \to W & \text{線形写像} \\ V: \text{有限次元} \end{cases}$

このとき

$$\dim \mathrm{Im} f + \dim \mathrm{Ker} f = \dim V$$

Remark ① 例1 : $2 + 0 = 2$

② Prop 3 より

$\vec{v_1}, \cdots, \vec{v_n}$: V の基底

$\Rightarrow \mathrm{Im} f = \langle \underbrace{f(\vec{v_1}), \cdots, f(\vec{v_n})}_{\text{ただし、1次独立とは限らない}} \rangle$

これより $\dim \mathrm{Im} f \leqq \dim V$

次元定理 : Ker の分だけ Im の次元が下がる

Proof) $\dim \mathrm{Im} f = k$, $\dim \mathrm{Ker} f = l$ とおいて

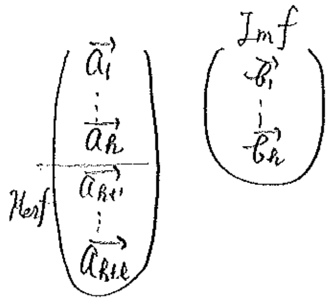
$k + l = \dim V$ を示す

1. $\vec{b_1}, \cdots, \vec{b_k}$ を Im f の基底とする.

このとき、$\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_k} \in V$ を

$f(\vec{a_1}) = \vec{b_1}, \cdots, f(\vec{a_k}) = \vec{b_k}$

を満たすものとする



2. $\underbrace{\overrightarrow{a_{k+1}}, \cdots \overrightarrow{a_{k+l}}}_{l\text{コ}} \in V$ を Ker f の基底とする

このとき、$\vec{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_{k+l}}$ が V の基底となることを示す.

3, $V = \langle \vec{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_{k+l}} \rangle$ について

$\vec{v}$ を V の任意の元とすると

$f(\vec{v}) = c_1\vec{b_1} + \cdots + c_k\vec{b_k}$

と表せる このとき.

$f(\vec{v}) = c_1 f(\vec{a_1}) + \cdots + c_k f(\vec{a_k})$

$= f(c_1\vec{a_1} + \cdots + c_k \vec{a_k})$

よって $f(\vec{v} - (c_1\vec{a_1} + \cdots + c_k\vec{a_k})) = \vec{0}$

輙わち $\vec{v} - (c_1\vec{a_1} + \cdots + c_k\vec{a_k}) \in \mathrm{Ker} f$

よって. $\vec{v} - (c_1\vec{a_1} + \cdots + c_k\vec{a_k})$

$= c_{k+1}\overrightarrow{a_{k+1}} + \cdots + c_{k+l}\overrightarrow{a_{k+l}}$

と表される 移項して

$\vec{v} = c_1\vec{a_1} + \cdots + c_{k+l}\overrightarrow{a_{k+l}}$

4. $\vec{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_{k+l}}$ は1次独立 について

(*) $c_1\vec{a_1} + \cdots + c_{k+l}\overrightarrow{a_{k+l}} = \vec{0}$ とする

このとき. $f(c_1\vec{a_1} + \cdots + c_{k+l}\overrightarrow{a_{k+l}}) = f(\vec{0}) = \vec{0}$

$\|$

$\underset{\vec{b_1}}{\underset{\|}{c_1 f(\vec{a_1})}} + \cdots + \underset{\vec{b_k}}{\underset{\|}{c_k f(\vec{a_k})}} + \underbrace{c_{k+1} f(\overrightarrow{a_{k+1}}) + \cdots + c_{k+l} f(\overrightarrow{a_{k+l}})}_{\substack{\| \\ \vec{0}}}$

よって $c_1\vec{b_1} + \cdots + c_k\vec{b_k} = \vec{0}$

よって $c_1 = \cdots = c_k = 0$

(*)に代入して $c_{k+1}\overrightarrow{a_{k+1}} + \cdots + c_{k+l}\overrightarrow{a_{k+l}} = \vec{0}$

よって $c_{k+1} = \cdots = c_{k+l} = 0$ 図

例1との違い

例2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

☆ $\mathrm{Im} f_A$ $\quad \mathrm{Im} f_A = \langle f_A(\vec{e_1}), f_A(\vec{e_2}) \rangle$

$= \langle \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}} \rangle$

1次独立でない $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$= \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$

$\therefore \dim \mathrm{Im} f_A = 1$

☆ $\mathrm{Ker} f_A$ $\quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f_A \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} v_1 + 2v_2 = 0 \\ 2v_1 + 4v_2 = 0 \end{cases}$ 2倍

よって $\begin{cases} v_1 = -2t \\ v_2 = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ あるいは $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

すなわち $\mathrm{Ker} f_A = \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ $\quad \therefore \dim \mathrm{Ker} f_A = 1$

よって $1 + 1 = 2$

($\dim \mathrm{Im} f_A + \dim \mathrm{Ker} f_A = \mathbb{R}^2$ を満たす)