Lect 10. 同型写像

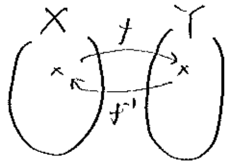
Review V, W : ベクトル空間

$f: V \to W$ が 線形写像（ベクトル空間の準同型写像）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (1) $f(\vec{v}+\vec{w}) = f(\vec{v})+f(\vec{w})$

(2) $f(c\vec{v}) = cf(\vec{v})$

1. 同型写像



1対1対応

復習（Part 1） X, Y : 集合

$f: X \to Y$ 全単射

$\Longrightarrow$ ・X と Y は集合として 同一視できる

・逆写像 $f^{-1}: Y \to X$ が存在する

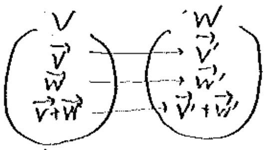
これをベクトル空間に upgrade する.

Def V, W : ベクトル空間

① 写像 $f: V \to W$ が（ベクトル空間の）同型写像 (isomorphism)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (1) f は全単射

(2) f は線形写像.



（注：このとき 逆写像 f^{-1} も線形写像となる）

② V と W が（ベクトル空間として）同型 (isomorphic)

（このとき $V \cong W$, $V \simeq W$ と表す）

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ある同型写像 $f: V \to W$ が存在する.

ポイント① 同型とは ベクトル空間として 同一視できること

Theorem 1 V : ベクトル空間

$\dim V = n (\neq 0) \Longrightarrow V \cong \mathbb{R}^n$

Proof) 仮定より V はある基底 $\vec{a_1}, \dots, \vec{a_n}$ を持つ

（復習：Lect 9. Prop 4 線形写像 $f: V \to \mathbb{R}^n$ は V の基底の像を与えることにより定まる.）

f を次で定まる線形写像とする. $f: V \to \mathbb{R}^n$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a_1} \mapsto \vec{e_1} \\ \quad\vdots \qquad\ \vdots \\ \vec{a_n} \mapsto \vec{e_n} \end{array}\right\} \mathbb{R}^n \text{の標準基底}$$

より具体的には、任意の $\vec{v} \in V$ に対して

$\vec{v} = c_1\vec{a_1} + \cdots + c_n\vec{a_n}$

と一意的に表すことができる。このとき、

$f(\vec{v}) = c_1 f(\vec{a_1}) + \cdots + c_n f(\vec{a_n})$

$= c_1\vec{e_1} + \cdots + c_n\vec{e_n} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

係数を縦に並べたもの

このとき f は全単射であることを示す。

・<u>全射</u>　任意の $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$\vec{v} = c_1\vec{a_1} + \cdots + c_n\vec{a_n}$ とおくと $f(\vec{v}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$　（上の計算より）

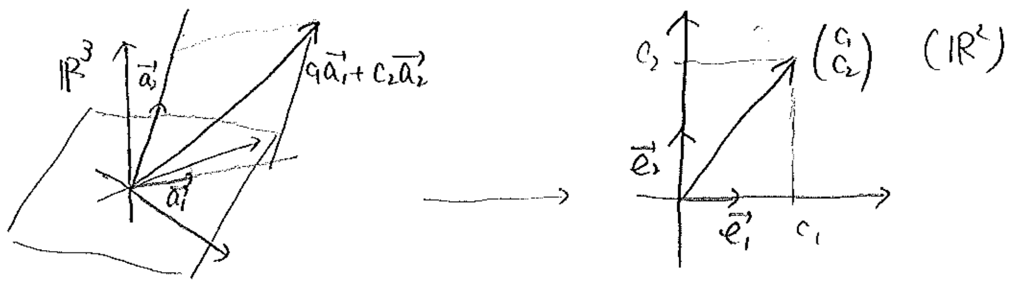
<u>単射</u>　$\vec{v}, \vec{v}' \in V$

$\begin{cases} \vec{v} = c_1\vec{a_1} + \cdots + c_n\vec{a_n} \\ \vec{v}' = c_1'\vec{a_1} + \cdots + c_n'\vec{a_n} \end{cases}$ とする。

このとき、$f(\vec{v}) = f(\vec{v}')$ とすると $c_1 = c_1', \cdots, c_n = c_n'$

よって、$\vec{v} = \vec{v}'$　$\boxtimes$

<u>例</u>



V, $\dim V = 2$

<u>Remark</u>　$\dim V = n$, $\dim W = m$ とする

$f: V \to W$, 線形写像

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

$\tilde{f}$：線形写像

Lect 9：行列を用いて表すことができる。

これを f の<u>行列表示</u>という

V, W の基底のとり方によって変化する。

（うまく基底をとると行列が簡単になる）

Prop2 $f: V \to W$ 同型写像

$\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_n}$ は V の基底 $\Longrightarrow f(\vec{a_1}), \cdots, f(\vec{a_n})$ は W の基底

(すなわち、同型写像は基底を保つ)

Proof) ① $f(\vec{a_1}), \cdots, f(\vec{a_n})$ は一次独立

$\because$ $c_1 f(\vec{a_1}) + \cdots + c_n f(\vec{a_n}) = \vec{0}$ とする

すると $f(c_1\vec{a_1} + \cdots + c_n\vec{a_n}) = \vec{0}$

このとき $f(\vec{0}) = \vec{0}$ と f の単射性より

$c_1\vec{a_1} + \cdots + c_n\vec{a_n} = \vec{0}$

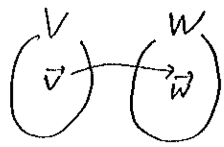
すると、$\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_n}$ の一次独立性より

$c_1 = \cdots = c_n = 0$

② $W = \langle f(\vec{a_1}), \cdots, f(\vec{a_n}) \rangle$

$\because$ 任意の $\vec{w} \in W$ に対して、f の全射性より

$f(\vec{v}) = \vec{w}$ となる $\vec{v} \in V$ が存在する



$\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_n}$ は V の基底なので

$\vec{v} = c_1\vec{a_1} + \cdots + c_n\vec{a_n}$

と表される。このとき

$\vec{w} = f(\vec{v}) = f(c_1\vec{a_1} + \cdots + c_n\vec{a_n})$

$= c_1 f(\vec{a_1}) + \cdots + c_n f(\vec{a_n})$ ∎

Prop2より $V \cong W \Longrightarrow \dim V = \dim W$

対偶をとって

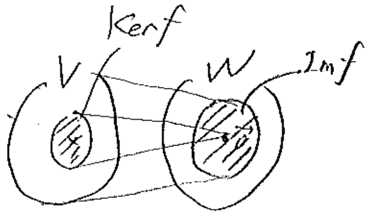
Theorem3 $\dim V \neq \dim W \Longrightarrow V \not\cong W$

特に $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ ($n \neq m$ のとき)

以上で有限次元ベクトル空間の同型による分類ができた。

$$V \cong \begin{cases} \{\vec{0}\} & \dim V = 0 \\ \mathbb{R}^n & \dim V = n \end{cases}$$

2. Ker f と Im f



__Def__ $f: V \to W$ 線形写像

(1) $\mathrm{Im} f := f(V) = \{ f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V \}$

f の image (像)

(2) $\mathrm{Ker} f := f^{-1}(\{\vec{0}\}) = \{ \vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0} \}$

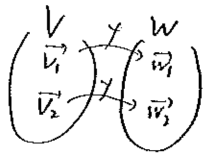
f の kernel (核)　$f^{-1}(\vec{0})$ とも表す

__Prop 4__ (1) $\mathrm{Im} f$ は W の部分空間である.

(2) $\mathrm{Ker} f$ は V の部分空間である.

Proof) (1) ① $\vec{0} \in \mathrm{Im} f$

$f(\vec{0}) = \vec{0}$ より成立



② 和で閉じていること

$\vec{w_1}, \vec{w_2} \in \mathrm{Im} f$ とする. すると

$\vec{w_1} = f(\vec{v_1})$, $\vec{w_2} = f(\vec{v_2})$ となる $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$ が存在する

このとき. $f(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = f(\vec{v_1}) + f(\vec{v_2}) = \vec{w_1} + \vec{w_2}$

よって $\vec{w_1} + \vec{w_2} \in \mathrm{Im} f$

③ スカラー倍

上と同様

(2) ① $\vec{0} \in \mathrm{Ker} f$

$f(\vec{0}) = \vec{0}$ より成立

② 和で閉じていること

$\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathrm{Ker} f$ とする. このとき.

$f(\vec{v_1} + \vec{v_2}) = f(\vec{v_1}) + f(\vec{v_2}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

よって $\vec{v_1} + \vec{v_2} \in \mathrm{Ker} f$

③ スカラー倍

上と同様