

Part 1. 集合と写像

Lect 1. 数理論理

overview

ポイント① (現代数学のパラダイム)

数学とは「集合と写像の研究」であり、また、自然界・社会における数理現象の「集合と写像」による研究である。

Part 1. 集合と写像

Part 2. 構造. 準同型写像
(構造を保つ写像)

例 ヲフトル空間 線形写像

Part 3. 実数の構造

1. 数理論理 (mathematical logic)

“数理論理の定式化にはさまざまな方法がある。
ここでは、講義に必要な最小限の事項にとどめる”

① 命題 (proposition)

= 真偽の定まった (数学的な) 文

例: 「4は2の倍数である」 真の命題 「命題が成り立つ」といって hold
「5は2の倍数である」 偽の命題

Remark: 但し、数学では、「命題」といえば「真の命題」の意味が多い。
定理

② 複合命題 (論理式, formula)

P, Q = 命題

- P でない (not)
- P かつ Q である (and)
- P または Q である (or)
- P ならば Q である (If ~, then ~)

論理記号

- $\neg P$ 論理以外の数学の文献で
- $P \wedge Q$ 用い5れることは稀である
- $P \vee Q$
- $P \rightarrow Q, P \Rightarrow Q$ 板書等では informal に良く用い5る。

複合命題の真偽を以下で定めた

真理値表

	P	P でない
偽	0	1
真	1	0

P	Q	P かつ Q	P または Q	P ならば Q
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

← 2行定めた

例: 「3は2の倍数である」 ならば 「5は2の倍数である」
偽
は真の命題

以下、これと繰り返して新しい命題を構成する

③ 同値な命題

「PならばQ」かつ「QならばP」が真とすると、(P \leftrightarrow Qと表す)
 $P \Rightarrow Q$ $Q \Rightarrow P$

よって PとQの真偽は一致する。相互に成り立つ。

P	Q	(PならばQ) = A	(QならばP) = B	AかつB
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0

Def 命題 P, Q の真偽が一致するときは、PとQは同値という。

例 (よく用いる) P, Q, R の真偽に関わらず 以下が成り立つ? (真である)
 (両辺の真偽が一致)

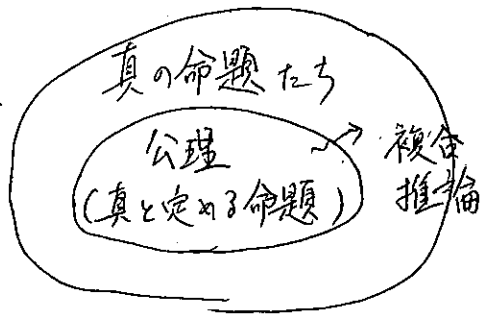
- (1) 二重否定 「Pでない」でない \Leftrightarrow P
- (2) 交換則 PかつQ \Leftrightarrow QかつP
 PならばQ \Leftrightarrow QならばP
- (3) 結合則 「PかつQ」かつR \Leftrightarrow Pかつ「QかつR」
 「PならばQ」ならばR \Leftrightarrow Pならば「QならばR」
- (4) 分配則 「PならばQ」かつR \Leftrightarrow 「PかつR」ならば「QかつR」
 直観的にわかる \rightarrow 「PかつQ」ならばR \Leftrightarrow 「PならばR」かつ「QならばR」
- (5) De Morgan の法則 「PかつQ」でない \Leftrightarrow 「Pでない」ならば「Qでない」
 「PならばQ」でない \Leftrightarrow 「Pでない」かつ「Qでない」
- (6) 対偶 (contraposition) PならばQ \Leftrightarrow 「Qでない」ならば「Pでない」

P	Q	PならばQ	「Qでない」ならば「Pでない」
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

④ 推論

- (1) Pと「PならばQ」が真のときは、Qは真 (③真理値表より)
- (2) 三段論法: 「PならばQ」と「QならばR」が真のときは、「PならばR」は真
 ⑤ Pが真ならば仮定(1)より Qは真. 同様にして Rは真
- (3) 背理法: 「Pでない」ならばQが真でQが偽のときは Pは真 (⑥対偶で(1)より帰着)

Remark 1



論理体系に矛盾はないか? \Rightarrow 形式論理の理論

Remark 2

以上のことは 日常の論理にあてはまらないことが多い
(藤原正考「日本の品格」)

- (例) 「福田氏は良い首相である」 主観, 真偽の2択か, 変化する...
- 「私は明日のパーティに行ける」の否定は? } 不確定性
- 「人間はそのうち 100mを7秒で走る」
- 「飲んだら乗れない」の対偶は? 前後関係
- 「乗りたいなら飲まない」で良いか?
- 飲んではいけない

三段論法の原形

{	10円玉は銅でできている	$P \Rightarrow Q$	状態
	銅は 1000°Cで溶ける	$Q \Rightarrow R$	状態の変化

よて, 10円玉は 1000°Cで溶ける.
対偶 1000°Cで溶けなければ, (本銀) 10円玉ではない。

ポイント② 数理論理とは自然界における状態やその変化の背後にある普遍的な法則を(人間の思考力により)抽象化したものである。