Lect 7 Exercise

今日のテーマ: 1. 部分空間, 2. 一次独立

7-1. ベクトル空間 V の部分集合 W が V の部分空間であるための 3 つの条件を述べよ.

7-2. (略)

7-3. $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ をベクトル空間 V の元とするとき, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ の生成する部分空間 $\langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \rangle$ の定義を述べよ.

7-4. ベクトル空間 V の元 $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ が 1 次独立であることの定義を述べよ.

7-5. (1) n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の元

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

が 1 次独立であることを示せ.

7-6. 以下の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ の元は一次独立か?

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$

7-7. ベクトル空間 V の元に対して以下を示せ.

(1) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ の中に 0 ベクトルがあれば, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ は 1 次独立でない.

(2) $r < m$ とする. $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ が 1 次独立ならば, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ は 1 次独立.

hint: (1) 非自明な解の例を与える. (2) 対偶を示す.

(裏に 7-7 の解答例あり)

解答例

7-7. (1) たとえば $\vec{v}_1 = \vec{0}$ とする．このとき,

$$1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_m = \vec{0}$$

が成り立つ．よって, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ は 1 次独立ではない.

(2) 対偶を示す.

$\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ は 1 次独立でないとする．すると,

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_r\vec{v}_r = \vec{0}$$

はある非自明な解 $c_1, \ldots, c_r$ を持つ．(すなわち, ある i に対して $c_i \neq 0$.) この非自明な解に対して

$$c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_r\vec{v}_r + 0\vec{v}_{r+1} \cdots + 0\vec{v}_m = \vec{0}$$

が成り立つ．よって, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ は 1 次独立ではない.