

Lect 2 Exercise

今日のテーマ

1. 集合, 2. 集合の構成法

1-1. すべての整数の集合 \mathbb{Z} をいろいろな表し方 (具体的に表す, 文章で表す, 条件で表す) で表せ.

1-2. 集合 A, B に対して,

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A \sqcup B, \quad A - B, \quad A \times B$$

の定義を与えよ。また、部分集合 $A \subset X$ に対して、 X に関する補集合 A^c の定義を与えよ。

1-3. 部分集合 $A, B \subset X$ に対して

$$A - B = A \cap B^c$$

を示せ。

1-4. 集合 A, B に対して以下のことを示せ。

(1) $A \subset B \iff A \cap B = A.$

(2) $A - B = A \iff A \cap B = \emptyset.$

1-5. 集合 A, B, C に対して以下のことを示せ。

(1) 結合則

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

(2) 分配則

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

1-6. (De Morgan の法則) 集合 $A, B \subset X$ に対して以下のことを示せ。

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c,$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

Hint: つぎのように始めよ。

$x \in X$ に対して

$$x \in (A \cap B)^c \iff \dots$$

参考 (Russel のパラドックス) 集合 X を

$$X := \{A \mid A \text{ は集合}, A \notin A\}$$

と定める。この定義は一見問題がなさそうだが、実は X は集合とはならないことを示せ。

Hint: $X \in X$ と $X \notin X$ のどちらが成り立つか?