測定と誤差論

物理学実験　講義　その１

2008年4月21日

千代　勝実

誤差とは何か？

- （私たちが信じている）**正しい値**と実際の（測定された）値との差

例：自動車・電車の本当の速度と速度計との差
リンゴの本当の重さとハカリの読みとの差
鉛筆の本当の長さと定規の読みとの差
本当の実力と実際のテストの点数の差？？

正しい値と、誤差の種類、取り扱いや計算について勉強していく

本当の値とは何か？

- 本当の値はどうやって決めるのか？
  - 絶対的に与えられる数
    - 光の速度や真空の誘電率などの自然定数(定義定数)
    - 整数・無理数、円周率・自然対数の底などの抽象的な数
  - 測定で求める（測定値）
    - 物の長さや速度、質量など
  - 理論的に計算される（理論値・計算値）
    - 物体の描く放物線など物理理論によって

$$x = x_0 + v_x t, \quad y = y_0 + \frac{1}{2} g t^2$$ 放物運動

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$ 一般相対性理論

絶対的に決まっている量への誤差

- 誤差＝測定した量ー本当の量
  - 誤差＝測定した光の速度ー本当の光の速度
    - **310**,000,000m/s—299,792,458 m/s
      ＝10,~~207,542~~m/s＝10,000,000m/s
      下の桁は意味（自信）がないので右が正しい
  - おかしな例
    - バイトの給料(5000円のはずが4000円！）
      誤差＝4000円－5000円＝－1000円？？
    - 郵便番号(4648601) 誤差は求められない。

測定によって求める本当の値

- 何度も計って平均すると本当の値に近くなる
  - 偶然誤差は何度も計ると減る
  - 系統誤差は何度計っても減らない

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$ ------------------------ n回計ったときの平均値

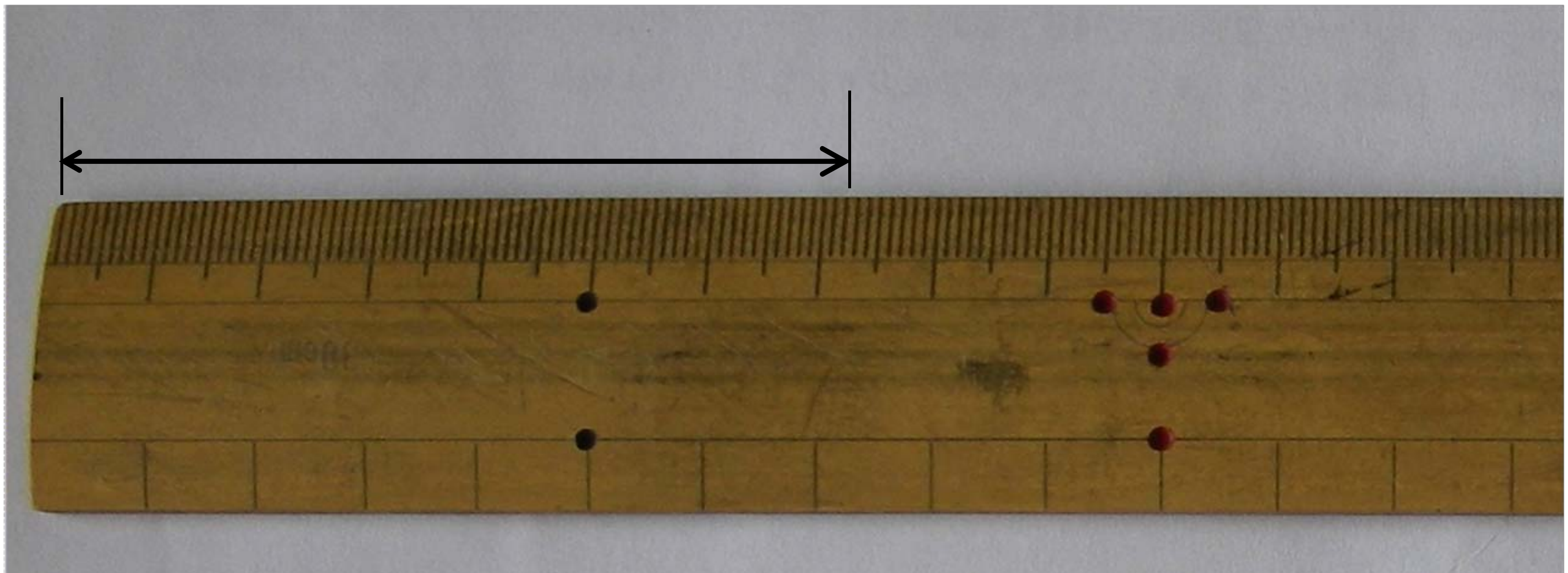
$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x\right)^2 \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \langle x \rangle\right)^2$$ n回計ったときの分散

本当の値　　平均値

$\boxed{\sigma = \sqrt{\sigma^2}$　標準偏差 → 統計誤差$}$

測定の誤差

- どの数字に信頼が置けるかが重要
  - 絶対の確信が持てる数字より一桁下までが測定値！



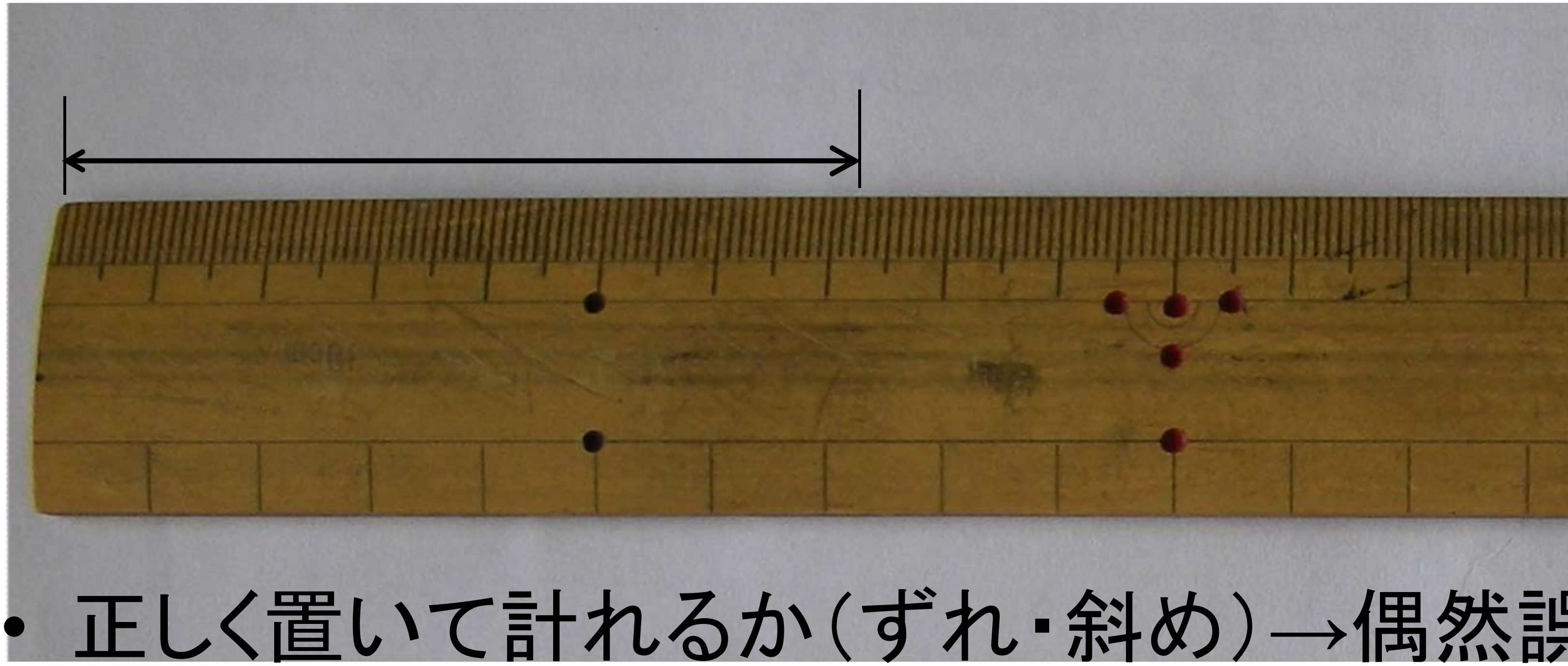
矢印の長さは？　7.2cmでしょうか？7.25cmでしょうか？

読み取り誤差

★7.25cmぽいけど読み取れにくい。4か6かも。

→7.25cmで自信がない部分を7.2 5±0.01cmとしよう

測定の誤差



- 正しく置いて計れるか（ずれ・斜め）→偶然誤差
- 目盛りを正しく読めるか→偶然誤差
- 定規が曲がってないか→系統誤差

何回か計ったら変わるよくわからない誤差（偶然誤差）と最初から偏っている誤差（系統誤差）がある。

統計誤差ー数学的に厳密に取り扱える

- 偶然誤差の一種で、確率論的にしか測定できない場合に発生（ほとんどすべての測定に存在する）

例）日本の男性と女性の本当の人口比:　0.49対0.51

適当に10人捕まえて性別を聞いたら男6人、女4人だった→6対4 この誤差は？
答え）二項分布の誤差　6±σ:4±σ＝6 ±1.5:4±1.5

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10\times0.6\times(1-0.6)} = 1.5$$

p~0.5のとき $\sigma \sim \sqrt{np} = p\sqrt{n}$

例）滅多に起きない事象(流れ星に当たってけがをする)確率の誤差

$$\sigma = \sqrt{pn}$$

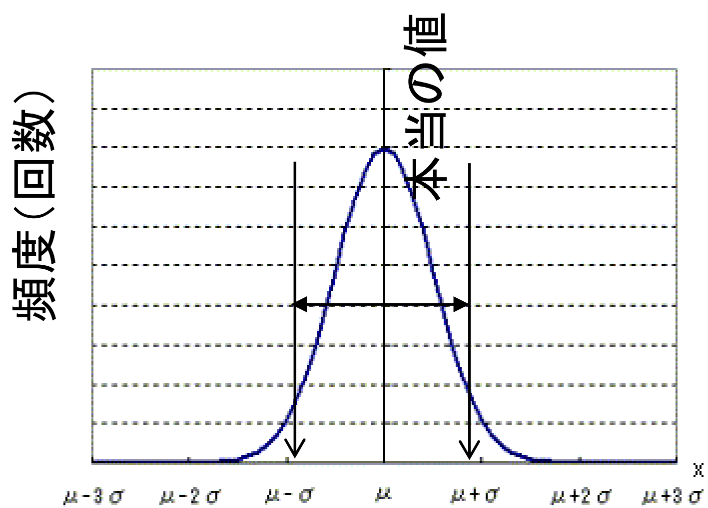
（上の式で(1-*p*) ~ 1とする)

1000人の世論調査でA総理の支持率50%、統計誤差は？　→　1.5%(1000の平方根の1/2)
1000人の世論調査でB総理の支持率は5%、統計誤差は？　→　0.7% (5%の平方根)

どちらにしても統計誤差は~ √n / n = 1/√n　で減っていく

偶然誤差

- なぜ発生するのか
  - 測定する対象自身が少しずつ変動する
  - 測定条件が微妙に変動する
  - 測定装置自身が微妙に変動する
  - 統計誤差　等
- 何度も測定すると、偶然誤差の分布は正規分布になることが多い（中心極限定理）
  - 誤差をプラスマイナス考慮して平均するとゼロに近づく
  - 本当の値に近い測定値が多くなる



正規分布
標準偏差σを考えると測定値は
（本当の値）±σに68.3%、
（本当の値）±2σに95.4%、
（本当の値）±3σに99.7%、
の確率で収まる。

実際はそこまでうまくいかない

LTCMという投資会社は正規分布的には数百年に1回しか起きないような国債の暴落で破綻した

測定によって求める本当の値(まとめ)

- 測定によって求める本当の値には、そもそも誤差が入っている
- 何度も測ると減る誤差と減らない誤差がある
  - 曲がった定規で何度測ってもダメ
  - とはいえ、偶然誤差は減るので何度も測る意味はある（1/√nで誤差は小さくなる）

測定によって欲しい値を求めることを直接測定という

直接測定の数値の書き方

- 絶対的に自信のある数字のひとつ下まで書く
  - 目盛りがなくてもがんばって読む、根性で読む
  - デジタルの場合、出てきた数字を書く
- 誤差は自分で決める(一桁でよい）
  - 124,125,126くらいの場合は125±1など
  - デジタルの場合、最小目盛りの半分が誤差
    - 変化が決まっている(0.25ごととか）、測定器に誤差が書いてある
- 誤差から逆に自信のある桁を求める
  - ストップウォッチは0.01秒まで出ますが、訓練されてないとせいぜい0.1秒くらいの精度。この場合、誤差を求めてから逆に12.53秒ではなく12.5±0.1秒とする(3は四捨五入する)

測定数値の書き方の例

他の人（教員･TA･同級生）からみて、あなたにどこまで自信があるかわかるように記入します。とにかく他人から見た目が重要。

結果は、（[測定値]±[誤差]）《指数》 単位　　と書きます。

◎　$(1.090 \pm 0.006) \times 10^3$ kg　非常によい

○　1090 ± 6 kg　間違いではないが、上の方がよりよい

×　$(1.090 \pm 0.006) \times 10^3$　単位を書く

×　$(1.09 \pm 0.006) \times 10^3$ kg　測定値の誤差の桁をはっきり書く

×　$1.090 \pm 0.006 \times 10^3$ kg　括弧を忘れないこと

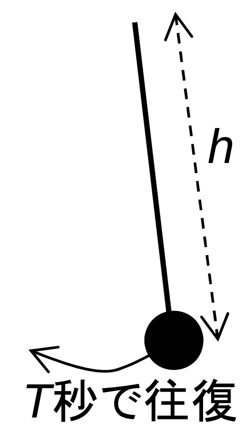
×　$1090 \pm 0.006 \times 10^3$ kg　わかりにくい

理論（数式）から求める本当の値

- 理論に代入するすべての数値が絶対的に決まっている場合
  - 計算結果は理論値といいます。誤差は（まず）ゼロ
- 理論に代入する一部の数値が測定によって求められている場合
  - 計算結果は間接測定といいます。誤差は測定の誤差から計算されます
- 例えば重力加速度測定実験の場合
  式はh: 振り子の長さ、T:振り子の周期として

$$g = 4\pi \frac{h}{T^2}$$

hとTに測定誤差が含まれる
→重力加速度gにも測定誤差が含まれる



間接測定の誤差

- 原始的には、代入する測定値を誤差の範囲でいろいろ動かしてみて、どれくらい計算結果が変わるかみる(Tを$T\pm\sigma$、hを$h\pm\sigma$の範囲で変化させて代入する)
- いろいろ動かす代わりに、個々の測定値を誤差の範囲で変化したときの変化量を加える
  - 求めたい物理量A、誤差δAで個々の測定値x,y,z、誤差δx…求めるための式A=f(x,y,z)の場合、Aは単純に計算して求める。誤差は

$$\delta A = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|\delta y + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|\delta z$$

ちょっと動かした量(誤差)

xをちょっと動かした時のAの変化量

間接測定の具体例

- 重力加速度測定(h=137.55±0.05cm, T=2.3538±0.0002s)
  - メートル・秒・キログラムに直す。角度はラジアンか度か気をつける
  - 計算過程は定数(πなど)も含め、十分長い桁で計算する。実際は自信のある桁＋2桁で問題ない。最後に自信のある桁＋1桁に直す（四捨五入）。
  - 誤差は同様に計算し、最後に1桁に直す（四捨五入）。

測定値 $$g = 4\pi^2 \frac{h}{T^2} = 4 \times 3.141593^2 \times \frac{1.3755\mathrm{m}}{(2.3538\mathrm{s})} = 9.801246\mathrm{m/s^2}$$

測定誤差 $$\frac{\delta g}{|g|} = \frac{\delta h}{|h|} + |2|\frac{\delta T}{|T|} \quad (\text{全体を}|g|\text{で割っていることに注意する})$$

$$\frac{\delta g}{|g|} = \frac{5}{13755} + 2 \times \frac{2}{23538} = 3.6 \times 10^{-4} + 1.7 \times 10^{-4} = 5.3 \times 10^{-4}$$

$$\therefore \delta g = |g| \times \frac{\delta g}{|g|} = 9.80\mathrm{m/s^2} \times 5.3 \times 10^{-4} = 5.2 \times 10^{-3}$$

→まず誤差を一桁にする(5×10^{-4}=0.005)→測定値を誤差の桁とあわせる

結局、測定値は9.801±0.005 m/s^2

桁だけで考える

意味のある桁（誤差が含まれている最初の桁）を意識する

足し算・引き算の場合（大きい方の桁にあわせる）

174.6cm－32.813mm = 174.6cm－3.2813cm
=171.3187 cm = 131.3 cm（四捨五入）

かけ算・割り算の場合(少ない方の桁数にあわせる）

$$\frac{L}{T} = \frac{732.19\mathrm{cm}}{0.23\mathrm{s}}$$
$$= 3183.4\mathrm{cm/s}$$
$$= 3200\mathrm{cm/s}$$
$$= 3.2 \times 10^3\,\mathrm{cm/s}$$

指数・対数計算には適用できませんので注意してください。

演習

- ストップウォッチで5秒を測定
  - 右のような表を作成
  - 最低20回測定
  - 平均・誤差・分散、標準偏差を求める
  - 測定値を決定する
- この測定で、
  - 10秒やそれ以上測ったときに標準偏差は大きくなるか、小さくなるか考えよ
  - 重力加速度測定ではストップウォッチで振り子の10周期を測定し10で割って1周期を求める。1周期だけを測る場合と比べて精度が高くなるが、なぜか。
- 問3（15ページ）の(1)(2)を計算せよ。誤差はつけずに桁で考えること。
- テキストの後ろの演習用紙（好きなものを使って良い）に名前・答えを書いて教員まで提出。内容を確認して、正解してから受け取ります。出席の代わりになります。

回数	読み（秒）	5秒との差	その2乗
1	5.10	0.10	0.0100
2	5.05	0.05	0.0025
3	4.86	-0.14	0.0196
4	4.91	-0.09	0.0081
5	5.05	0.05	0.0025
6	4.80	-0.20	0.0400
7	4.86	-0.14	0.0196
8	4.94	-0.06	0.0036
9	4.89	-0.11	0.0121
10	5.04	0.04	0.0016
計	49.50		0.1196

平均値:4.950、分散:0.01196、標準偏差:0.109
測定値：5.0±0.1