図形をドミノで敷き詰める　　　　　　数学アゴラ　2008年夏　　南　和彦

ドミノは縦と横の長さの比が1：2の長方形で, ドミノ倒しでおなじみのものです. このドミノによって, 図形を敷き詰めることを考えてみます. 図形はくまなく敷き詰めなければいけないし, ドミノが二重になってもいけません. この簡単なパズルがドミノの敷き詰め問題です.

例えば辺の長さが 2×2 の正方形の場合, その敷き詰め方はドミノを縦にならべる場合と横にならべる場合で2通りあります. 辺の長さが 2×3 の場合は3通りの配列があります. しかし辺の長さが 3×3 の正方形は, 簡単にわかりますがドミノによって敷き詰めることは不可能です.

ドミノの敷き詰め問題について最も基本的なのは次の二点です：

1）領域 D がドミノで敷き詰め可能であるために D のみたすべき条件は何か

2) 領域 D がドミノで敷き詰め可能であるとき, 敷き詰め方は何通りあるか

敷き詰めが可能であって, それが何通りの方法で可能なのかが分かっている例を2つ紹介します. ひとつは Aztec Diamond とよばれる図形で, 正方形を45度回転させたものと考えることができます（別紙参照）. これはその直径を n として $2^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ 通りの敷き詰め方があることがわかっています. もうひとつの例は長方形で, 縦を n, 横を m, どちらも偶数としてその敷き詰め方は

$$4^{mn/4}\prod_{j=1}^{n/2}\prod_{k=1}^{m/2}[\cos^2\frac{j\pi}{n+1}+\cos^2\frac{k\pi}{m+1}]$$

ここで $\displaystyle\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 a_s \cdots a_n$ です. これは複雑な式ですが, 例えば Pfaffian あるいは伝送行列の方法によって計算できます. この値は長方形を大きくすると簡単な数列

$$(e^{G/\pi})^{n\times m} \tag{1}$$

に近づいていきます. ここで G は Catalan 数とよばれる数で

$$\begin{aligned} G &= 1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots \\ &= 0.915965\cdots \end{aligned}$$

簡単な例として, 幅が $m=2$ の長方形について考えてみましょう. 縦が n のときの敷き詰め方を a_n とすると, $n=1$ の場合は縦が $n=1$ で $a_1=1$, $n=2$ の場合は縦が $n=2$ の正方形で $a_2=2$. 一般に縦が n のときは, 上端に横向きのドミノがあるときにはその下は縦が $n-1$ で敷き詰め方は a_{n-1},

上端に縦のドミノが 2 つあるときにはその下の敷き詰め方は a_{n-2} なので,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

つまり a_n はフィボナッチ数列になります.

フィボナッチ数列は, 木の枝の数や一本の枝に生える葉の数, 花びらの枚数, ひまわりの種の並び方, 巻貝の模様の長さの比など, 自然界に非常によくあらわれる数列です. このフィボナッチ数列の比 a_n/a_{n+1} は, $n \to \infty$ で黄金比に収束します. 黄金比は古来人間が最も美しく感じる比として, 建築や絵画に意識的に利用されてきました. ピラミッドやパルテノン神殿, ミロのヴィーナス, フランスの凱旋門の縦横の比などが黄金比にしたがっていることが知られています.

つまりフィボナッチ数列は, 我々の暮らす現実世界に現れるもので, その極限である黄金比は, 天上の理想の世界に現れる比であると考えることもできるでしょう.

我々は現実の世界においてフィボナッチ数列を見て暮らしているので, その結果, フィボナッチ数列の理想的な極限としての黄金比を, 美しいと感じるようになったのではないかと私は想像します.

お配りしたコピーにあるのは, 音楽における黄金比とフィボナッチ数列の話で, 古典的な音楽は楽章の比などが黄金比を意識して作られているのに対し, バルトークの作曲した曲では, 主題部, 展開部などの小節の比として, フィボナッチ数列が意識的に選ばれているということを指摘しています.

フィボナッチ数列の一般項は, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ とした場合

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\,[\,(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$$

で与えられます. これが特性方程式を解いて標準的な方法で計算できることは, 講義で説明した通りです.

一方で, 長方形の敷き詰め方についての一般的な結果と比較すると, n を偶数として

$$a_n = 4^{n/2} \prod_{j=1}^{n/2} [\cos^2 \frac{j\pi}{n+1} + \cos^2 \frac{\pi}{3}]$$

が得られます. つまりフィボナッチ数列が三角関数によってあらわされたわけです.

さて, ドミノで敷き詰めることが可能であるための必要十分条件と, 敷き詰め方をかなり一般的に分類する結果が得られています. それらを定式化するために, 高さの関数 height function $h(x)$ を導入します. まず, 縦横に並んだ正方形の升目を, ひとつずつ交互に, チェッカーボードのように白と黒にぬり分けます. するとこの上に乗っているドミノは, 半分が白で半分が黒に塗られることになります. このとき, どこかの格子点に 0 を割り振り, そこを起点に

してドミノのへりを反時計回りにまわりながら, 左側が黒のときには 1 ステップごとに数字を 1 だけ増やし, 左側が白のときには 1 ステップごとに数字を 1 だけ減らすという規則で, ドミノのへりに整数を割り振っていくと, くまなく敷き詰められたドミノの配置については, 全体に矛盾なく整数が割り振られます. どこを 0 にするのかについての任意性が残りますが, 0 の位置を変えることは全体に同じ整数をたすことに対応するので, これは本質的な問題ではありません. 格子点の位置を x, 配置された整数を $h(x)$ として, この h を height function とよびます. ドミノの配置と h とは, 0 の位置を固定すれば 1 対 1 に対応します. このとき点 x と y の間の一種の距離 $d(x,y)$ をドミノの辺にそって定義して

定理（敷き詰め可能性, Fournier 1995）：連結で穴のない領域 D が敷き詰め可能であるための必要十分条件は, D の境界上の任意の点について

$$d(x,y) \geq |h(x) - h(y)|$$

が成り立つことである.

定理（敷き詰め方, Cohn, Kenyon and Propp 2000）：領域 D は敷き詰め可能であるとする. D を大きくしたとき, D の境界上の $h(x)$ が, 傾き (s,t) の平面の上に収束するとき, ドミノによる D の敷き詰め方は

$$\exp(\mathrm{ent}(s,t)A)$$

通りに近付く. ここで A は D の面積, $\mathrm{ent}(s,t)$ は s と t によって決まる数である.

例えば, 辺の長さが m と n の長方形のドミノによる敷き詰め方は, m と n が大きい極限で (1) のようになっていました. このとき

$$A = m \times n, \qquad \mathrm{ent}(s,t) = G/\pi.$$

特に長方形の場合に $s = t = 0$ であることは, すぐにわかります.

ドミノの敷き詰め問題は数学の各分野で重要であるばかりではなく, 講義で説明したように, 磁性体における dimer 問題, 高温超伝導における RVB 状態, 情報科学における maching problem, 正方格子上の H_2O の模型である Ice 模型（格子点に O, 辺の上に H), そして別紙にあるような様々な分野の様々な問題に本質的に関連する, 一般的には Tiling 問題とよばれるものの一種です.