

単体法 (Simplex 法)

linear programming
LP次の形の線形計画問題を考える
(等式標準形)

$$[P] \quad \min \quad C^T x$$

$$s.t. \quad Ax = b \quad A = m \times n \\ x \geq 0$$

任意のLPはこの形にできる。

$$\text{例: } \max \quad d^T y$$

$$s.t. \quad My \leq f$$

$$y = z - z', \quad z \geq 0, z' \geq 0 \\ S = \text{新しい変数 } S \geq 0$$

$$\min \quad -d^T(z - z') = \underbrace{(-d^T \quad d^T \quad 0)}_{C^T} \begin{pmatrix} z \\ z' \\ S \end{pmatrix} \\ s.t. \quad M(z - z') + S = f \Leftrightarrow (M - M'I) \begin{pmatrix} z \\ z' \\ S \end{pmatrix} = f \\ z, z', S \geq 0$$

$\begin{pmatrix} z \\ z' \\ S \end{pmatrix} \geq 0$

• A は行フルランクと仮定してよい $\text{rank } A = m$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}^m$$

• A の基底 $\Leftrightarrow B \subseteq \{1, 2, \dots, n\} \mid |B| = m$ $a_i (i \in B)$ が $\mathbb{R}^m$ の基底 $\Leftrightarrow a_i (i \in B)$ を並べた行列が正則
 $m \times m$ 基底 B に対して A を B, N に分ける
※ 非基底変数, 引くと B となる

$$A = \begin{bmatrix} A_B & A_N \end{bmatrix} \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_1 x_1 + a_2 x_1 \\ \downarrow \\ (a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (a_2 \ a_1) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$B \cup N = \{1, 2, \dots, n\}$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} B \text{ の要素と対応する } x \text{ の値を基底} \\ N : \end{matrix}$$

 x_B : B に属する基底変数 x_N : B : 非基底変数

$$Ax = b \Leftrightarrow (A_B \ A_N) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = b$$

$$\Leftrightarrow A_B x_B + A_N x_N = b$$

$$\Leftrightarrow x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b$$

 B は基底解 $\dots$ 上の式で $x_N = 0$ とすれば x_B の解

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow Ax = b \text{ の解}$$

$$\text{実行可能} \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow A_B^{-1} b \geq 0$$

LP の条件を満たしているとき

• B : 実行可能と仮定して

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

 x の基底成分に代入すると

$$C^T x = (C_B^T \ C_N^T) \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$= C_B^T x_B + C_N^T x_N$$

$$= C_B^T A_B^{-1} b + (C_N^T - C_B^T A_B^{-1} A_N) x_N$$

元のLPは...

$$A = \begin{bmatrix} A_B & A_N \end{bmatrix} \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_1 x_1 + a_2 x_1 \\ \downarrow \\ (a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (a_2 \ a_1) \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$B \cup N = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} B \text{ の要素と対応する } x \text{ の値を基底} \\ N : \end{matrix}$$

 x_B : B に属する基底変数 x_N : B : 非基底変数

$$\min \quad C_B^T A_B^{-1} b + (C_N^T - C_B^T A_B^{-1} A_N) x_N$$

$$s.t. \quad x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

$$x_B \geq 0, x_N \geq 0$$

$$\min \quad v + \alpha^T x_N$$

$$s.t. \quad x_B = \beta - D x_N$$

$$x_B \geq 0, x_N \geq 0$$

最適値 v Lem $\exists \alpha \geq 0$ かつ $\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ が最適基底解

$$\odot \quad y = \begin{pmatrix} y_B \\ y_N \end{pmatrix} : \text{実行可能解}$$

$$y_B \geq 0, y_N \geq 0$$

$$y_B = \beta - D y_N \text{ とおける}$$

$$(Ay = b)$$

$$\text{基底成分に代入} \quad v + \alpha^T y_N \geq v = \beta - D x_N$$

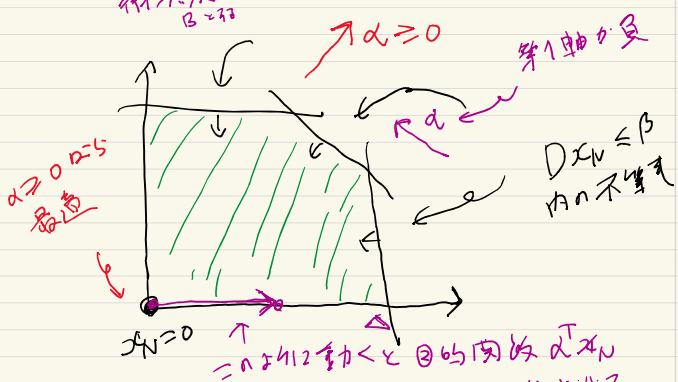
LP の解の方針 $\dots$ $\exists \alpha \in B$ とする

B に肉付群から X_B 項をとり

$$\text{Min. } d^T x_N (+v)$$

$$s, t. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_N \leq \beta \\ x_N \geq 0 \end{array} \right.$$

$$x_N \geq 0$$



- $\alpha \geq 0$ かつ $\alpha \leq 0$ (改善す)
- 負の成分 $\alpha < 0$ がある
- α 方向に x_N を増やす、すなわち
- $\alpha^T x_N \rightarrow 3$ 減少

单纯形法 (Simplex 法)

[illegible]

- 实行可能基座 $B \in 1 \rightarrow 6 \times 8$
- B_1 内部计算 6×3

$$\text{Min } v + d^T x_N$$

$$s.t. \quad x_B = \beta - D x_N \quad (\beta \geq 0)$$

$$x_B \geq 0, x_N \geq 0$$

- a. $\alpha \geq 0$ 且 $x = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ 为最优解

- $\exists k \in \mathbb{N}$ such that $\forall s \in \mathbb{N}$ $\alpha_s < 0$ (b'3)

S 方向に $\Delta (\geq 0)$ 移動した

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T$ 同6の南故に $\alpha_5 \Delta$ 成分
 $\epsilon \in D$ の5列目が ≤ 0

$$\Delta \rightarrow 11<57^{\circ} \text{ 大 } 5<7^{\circ} \text{ 小}$$

$$\text{Min} \rightarrow -\infty$$

LP: 非有界 終了

それ以外は D の系列に正の要素がある

下列各图均表示△ABC

$$\Delta := \min \left\{ \frac{\beta_r}{D_{rs}} \mid r \in B : D_{rs} > 0 \right\}$$

min 4 4 33
12 7 9 8 1 5 2 3 1

$$x_N = 0 \longrightarrow x'_N = \Delta e_s$$

$$x_B = \beta \longrightarrow x'_B = \beta' = (\beta - D \Delta e_s)$$

B11 基底肝

[illegible]

$$x_B + D x_N = \beta$$

- B-tryvly 是实行可能基座 (Disko)
- x' 是 x 的实行可能基座解 (对基座改变 = 0)

$$B \leftarrow B \setminus d \times y \cup h \times y$$

$$x \in x' \quad \text{and} \quad (1) \leq \sqrt{3}$$

实行可能基金 B

$$M_{in} \quad a^T x_N + r$$

辞書

$$s, \tau, \quad x_B + Dx_N - \beta = 0 \quad x_B, x_N \geq 0$$

$b \dots 0$	dT	v
$1 \dots 1$	b	$-b$

$\alpha \geq 0$ as stop
 $\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ 个最值解
 v 个最值解

$$\alpha_s < 0, \quad D_{rs} > 0 \quad \text{反-208} \quad D_{rs} \text{ 下降}$$

α	α	α	α
α	α	α	α
α	α	α	α
α	α	α	α

↓ 汉王出

	r		s	
	0	0	0	r
r	1		0	0
	1		0	0
			0	0
			0	0

$$B' = B \cup s \setminus r$$

$$v' \leq v$$

se B'ist 37
970-

x1	x2	x3	x4	x5	x6	
-2	-1	-1	0	0	0	0
2	2	-1	1	0	0	-4
2	0	4	0	1	0	-4
-4	3	-1	0	0	1	-1

B={4,5,6}

x1	x2	x3	x4	x5	x6	
0	1	-2	1	0	0	-4
1	1	-0.5	0.5	0	0	-2
0	-2	5	-1	1	0	0
0	7	-3	2	0	1	-9

B={1,5,6}

退化ピボット

x1	x2	x3	x4	x5	x6	
0	0.2	0	0.6	0.4	0	-4
1	0.8	0	0.4	0.1	0	-2
0	-0.4	1	-0.2	0.2	0	0
0	5.8	0	1.4	0.6	1	-9

B={1,3,6}

opt

例) Min $(-2 \ -1 \ -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ スラックを導入して

s.t. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Min $(-2 \ -1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$

s.t. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

2段階単体法

Min. $\langle c, x \rangle$ s.t. $Ax = b, x \geq 0$.

において、実行可能基底解を見つけるのは自明でない。

そこで、次の問題を考える。等式制約は、+1か-1をかけることで、 $b \geq 0$ と仮定できる。

Min. $\langle 1, y \rangle$ s.t. $Ax + y = b, x \geq 0, y \geq 0$

1はすべての要素が1のベクトルである。このとき $x=0, y=b$ は実行可能基底解である。ここから単体法をスタートして最適基底解を得る。このとき、最適値が0を超えた場合、元問題には、実行可能解が存在しない。最適値が0のときは、 $y=0$ であり、そのときの基底解は、元の問題の実行可能基底解となる。そこで、元問題に対して、単体法を走らすことができる。