

線形計画法

$$\begin{aligned} \text{Min. } & \sum_{j=1}^n c_j x_j && \leftarrow \text{目的関数} \\ \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1, 2, \dots, m) \\ \text{subject to } & \sum_{j=1}^n d_{kj} x_j \leq f_k \quad (k=1, 2, \dots, m') \\ & l_j \leq x_j \leq u_j \quad (j=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\sum_{j=1}^n} \right\} \text{制約条件}$$



歴史

- 1947年 Dantzig 単体法 (simplex法)
- 1979年 Khachian 楕円体法 物の変換式時間O(n⁴)
- 1984年 Karmarkar 内点法 多項式時間O(n³)

研究は 1124 つづいてる。

実用的に 10. ヴルバ-の発展は2.2

数千万変数の LP を解けるように2.2.3

線形不等式の一般論

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$\begin{pmatrix} - \\ \vdots \\ - \\ \vdots \end{pmatrix} a_{ij} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \downarrow A x \leq b$$

例: $\begin{cases} 2x + y \leq 1 \\ -x + 5y \leq -3 \end{cases}$

$x \leq 2, -x \leq -3 \Rightarrow x \geq 3$

非負制約: $x \geq 0, y \geq 0$

問題 解 x (←不等式系をみたす) を求めるには

どうすればよいのか? 存在しないことを保証するには

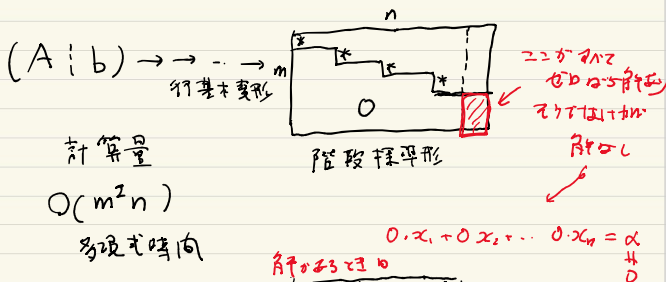
どうすればよいのか?

線形方程式の2重の復習

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$\Rightarrow A x = b \quad \text{と } x \text{ がある?}$$

高次元行列 $(A|b)$ に対しては Gauss の消去法 ← 適用



$$\begin{pmatrix} E & D & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

2者択一定理

次のどちらか一方が成立、他方は不成立

- (1) $Ax = b$ に解 x が存在
- (2) $y^T A = 0, y^T b > 0$ となる y が存在 (解なしの証明)

① 同時に成り立たない

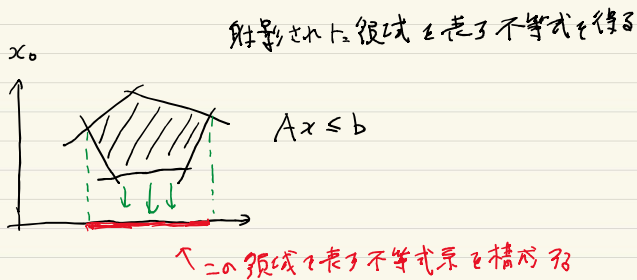
$$x, x \text{ が存在しない} \Rightarrow y^T A x = y^T b \rightarrow 0 \cdot x = y^T b \neq 0$$

$$R(A|b) = \begin{pmatrix} * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行基本変形}} [A|b] = [0 \dots 0 | *]$$

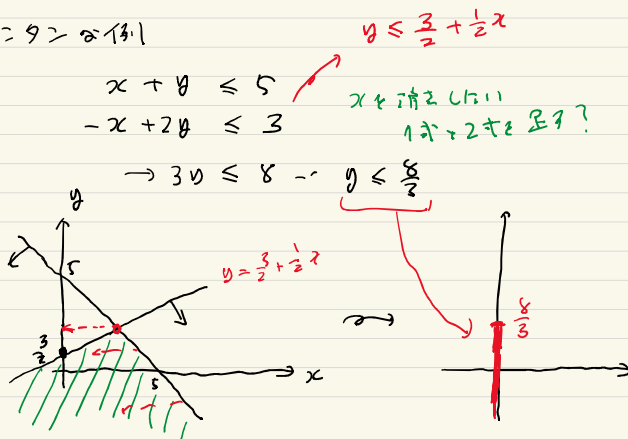
→ 不等式系に一般化する。

フーリエ・モントギンの消滅法

変数の消滅 ---- 不等式系で与えられた領域を射影.



カニタン 2 例



2次元問題を一般化

$$Ax \leq b \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x' \end{pmatrix} \quad x' = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

正数に拘束 + 与えられたより

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1^T \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_j^T \\ -1 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ -1 & a_k^T \\ 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} I_+ \\ \\ I_- \\ \\ I_0 \end{matrix}$$

↑ 行は正、負

x_1 の係数を 1, -1, 0 とする

射影する不等式系

$$\begin{cases} x_1 + a_i^T x' \leq b_i & (i \in I_+) \\ -x_1 + a_j^T x' \leq b_j & (j \in I_-) \\ a_k^T x' \leq b_k & (k \in I_0) \end{cases}$$

2次元 (i, j) の場合, $i \in I_+, j \in I_-$ に注意不等式 (2)

$$(*) \quad \begin{cases} (a_i + a_j)^T x' \leq b_i + b_j & (i \in I_+, j \in I_-) \\ a_k^T x' \leq b_k & (k \in I_0) \end{cases}$$

定理 x_1 軸に x_1 を射影した領域 R 新しい不等式 (*) を加える

$$R = \{x' \mid \exists x_1 \text{ が存在して } A \begin{pmatrix} x_1 \\ x' \end{pmatrix} \leq b\}$$

2次元

$R' = (*)$ の解の集合

$$R = R' \text{ となる}$$

$$R \subseteq R' \text{ は 精確に証明できる}$$

$$R \supseteq R' \text{ は ?}$$

(*) を加える x' から x_1 をつけよう

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x' \end{pmatrix} \leq b$$

2次元にどのように出るか?

→ 出来る!

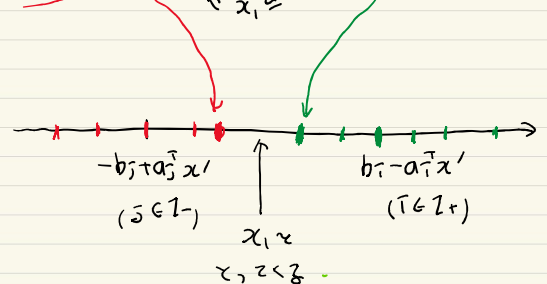
空の区間 R' が空のとき R も空. ($R \subseteq R'$)

R が空のとき R' も空? → R' が空のとき x_1 が存在しない $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x' \end{pmatrix} \leq b$ → R も空のとき

$x' = (*)$ を加える. 2次元

$$-b_j + a_j^T x' \leq b_i - a_i^T x' \quad (i \in I_+, j \in I_-)$$

$$\max_{j \in I_-} -b_j + a_j^T x' \leq \min_{i \in I_+} b_i - a_i^T x'$$



$$-b_j + a_j^T x' \leq x_1 \leq b_i - a_i^T x' \quad (i \in I_+, j \in I_-)$$

$$\begin{cases} x_1 + a_i^T x' \leq b_i & (i \in I_+) \\ -x_1 + a_j^T x' \leq b_j & (j \in I_-) \\ a_k^T x' \leq b_k & (k \in I_0) \end{cases}$$

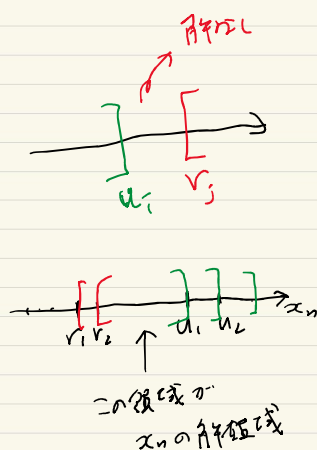
→ 元の不等式系 (2 等価)

7-12. モンシヤンの消去法による解の存在アルゴリズム

$Ax \leq b \rightarrow x_1$ と消去 $\rightarrow x_2$ と消去 $\rightarrow \dots \rightarrow x_{n-1}$ と消去

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq b \rightarrow A_1 \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq b_1 \rightarrow A_2 \begin{pmatrix} x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq b_2 \rightarrow$$

$$\dots \rightarrow A_{n-1}(x_n) \leq b_{n-1}$$



$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} x_n \leq \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ -1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_n \leq \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_e \\ -v_1 \\ \vdots \\ -v_{e'} \end{pmatrix}$$

もしも
右の要素が非負
 $0 \leq -\alpha$

解 x_n が存在する $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ まで

解を戻して

元の不等式系の解 x を得る

2者択一定理 (Farkas の命題)

次の2つは一方が成立、他方は不成立

(1) $Ax \leq b$ と同じ x が存在

(2) $y^T A = 0$ かつ $y^T b < 0$ ならば $y \geq 0$ が存在

(解が存在しないことに注意)

① 7-12 モンシヤンの消去法で解なしの状態を号する

$$x_n \leq u_i \quad \text{かつ} \quad u_i < v_j$$

$$\text{つまり} \quad -x_n \leq -v_j$$

$$0 \leq u_i - v_j < 0$$

$\leadsto$ 7-12 モンシヤンで消去した
変数を消去すると

$$0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n < 0$$

$$\begin{matrix} \uparrow & & \uparrow \\ y^T A & & y^T b \\ \uparrow & & \uparrow \\ y \geq 0 & \rightarrow & y^T A = 0, \quad y^T b < 0 \\ & & y \geq 0 \end{matrix}$$

例題

$$x + y + z \leq 5 \quad \text{--- (1)}$$

$$-x + 5y - z \leq 2 \quad \text{--- (2)}$$

$$-x + 2y + 3z \leq -1 \quad \text{--- (3)}$$

$$x - y + z \leq 0 \quad \text{--- (4)}$$

$$3y - z \leq 1 \quad \text{--- (5)}$$

の解を見つけよ。または、存在しないことを示せ。

後退代入: y として $y=0$ をとることにして $y=0$ を (5)-(9) に代入

$$4z \leq 4$$

$$4z \leq -1$$

$$-z \leq 1$$

$$\rightarrow -1 \leq z \leq -1/4$$

ステップ1: x を消去 (x 軸にそって射影)

$$6y \leq 7 \quad \text{--- (6) = (1) + (2)}$$

$$3y + 4z \leq 4 \quad \text{--- (7) = (1) + (3)}$$

$$4y \leq 2 \quad \text{--- (8) = (2) + (4)}$$

$$y + 4z \leq -1 \quad \text{--- (9) = (3) + (4)}$$

$$3y - z \leq 1 \quad \text{--- (5)}$$

z として $z=-1$ をとることにして, $(y,z)=(0,-1)$ を (1)-(5) に代入

$$x - 1 \leq 5$$

$$-x + 1 \leq 2$$

$$-x - 3 \leq -1$$

$$x - 1 \leq 0$$

$$-1 \leq 1$$

ステップ2: z を消去 (z 軸にそって射影)

$$6y \leq 7 \quad \text{--- (6)}$$

$$15y \leq 8 \quad \text{--- (7) + 4x(5)}$$

$$4y \leq 2 \quad \text{--- (8)}$$

$$13y \leq 3 \quad \text{--- (9) + 4x(5)}$$

解あり. $y \leq 3/13$

$$\rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

例えば, $x=0$ をとれば, $(x,y,z) = (0,0,-1)$ が解の1つ.

フーリエ・モツキンの消去法の計算量評価

1つの変数消去で、不等式の個数は、 m から $|I| + |x| + |I| + |I|$ に増える。最悪の場合 m から $(m/2)^2$ に増える。 n 個の変数消去では最悪ケースで不等式の個数は、

$$\left(\frac{1}{2} \left(\dots \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{m}{2} \right)^2 \right)^2 \right)^2 \dots \right)^2 \right)^2$$

$$= \frac{m^{2^n}}{2^{2^n} 2^{2^{n-1}} \dots 2^{2^1}} \approx \frac{m^{2^n}}{2^{2^{n+1}}} = \left(\frac{m}{4} \right)^{2^n}$$

2重指数的!!
(x3!)爆発!!)

したがって、解を一つ求めるためには、このアルゴリズムは極めて非効率で使われることはまずない。2重指数的を1重指数的に改良できるらしい。一般に、多面体を射影するとそれを表現する不等式の個数は指数的に増加するので指数時間計算量は仕方ないともいえる。そのような不等式表現が欲しい場面もあるので、活躍の場面はそれなりにある（数式処理ソフトなど）。