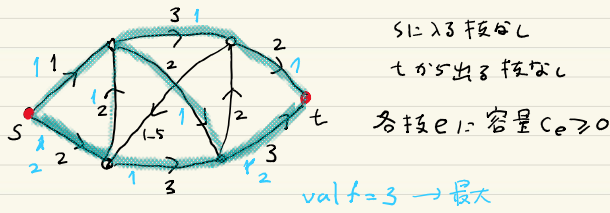


ネットワークフロー

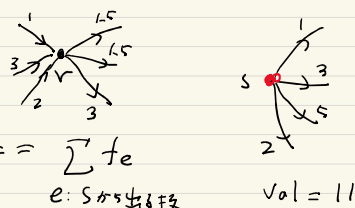
有向グラフ $G=(V,E)$, $s \in V$, 出口 $t \in V$



フロー $f = (f_e)_{e \in E}$

容量制約 $0 \leq f_e \leq c_e$ ($e \in E$)

保存則 $\sum_{e: v \rightarrow} f_e = \sum_{e: v \leftarrow} f_e$ ($v \in V \setminus \{s, t\}$)
 $e: v \rightarrow$ は v から出る枝
 $e: v \leftarrow$ は v に入る枝



流量 $val f = \sum_{e: s \rightarrow} f_e$

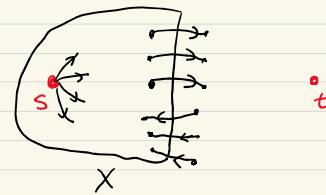
$val = 11$

最大フロー問題 (Maximum flow problem)

流量 $val f$ が最大になるフロー f を求める

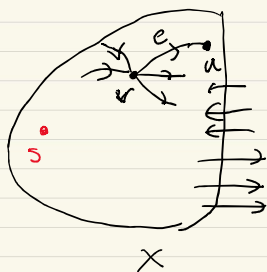
Lem $X \subseteq V$; $s \in X$ かつ $t \notin X$, f : フロー

$val f = \sum_{e: X \rightarrow} f_e - \sum_{e: X \leftarrow} f_e$



$\therefore val f = \underbrace{s \text{ から出る流量}}_{11} - \underbrace{s \text{ に入る流量}}_{0}$
 $+ \sum_{v \in X \setminus \{s\}} \underbrace{v \text{ から出る流量}}_{0} - \underbrace{v \text{ に入る流量}}_{0}$

$= \sum_{v \in X} \left(\sum_{e: v \rightarrow} f_e - \sum_{e: v \leftarrow} f_e \right)$
 この和は、 s から出る流量と、 s に入る流量の差である。



もし枝 $e=(v,u)$ の両端が X に含まれていると

$f_e - f_e$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $v \text{ から出る} \quad u \text{ に入る}$

$\rightarrow \sum \sum$ 内部キャンセル
 部分

残る枝 -- X から出る枝 -- $+$ 残る枝
 X に入る枝 -- $-$ 残る枝

$val f = \sum_{e: X \rightarrow} f_e - \sum_{e: X \leftarrow} f_e$

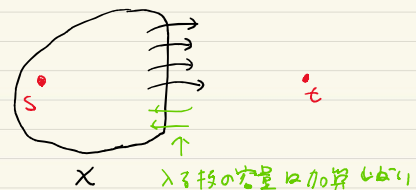
$\max val f \leq \min c(X)$

f : フロー X : カット

$\Rightarrow$ 最大値と最小値が一致する

カット $X \subseteq V$, $s \in X$ かつ $t \notin X$

カット容量 $c(X) = \sum_{e: X \rightarrow} c_e$



Lem (弱双対性)

任意のフロー f , 任意のカット X

$val f \leq c(X)$

$\therefore val f = \sum_{e: X \rightarrow} f_e - \sum_{e: X \leftarrow} f_e$

$\leq \sum_{e: X \rightarrow} c_e \leq \sum_{e: X \rightarrow} c_e = c(X)$

$\Rightarrow$ もしカット X が存在すれば $val f = c(X)$ ならば f は最大, $c(X)$ は最小

最大フローを求める

Ford-Fulkerson の増加道アルゴリズム

f : 70- ($f = 0$ だと OK)

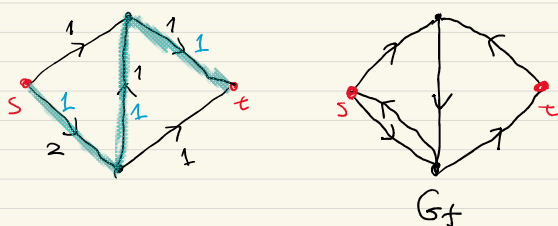
残余ネットワーク $G_f = (V, A_f \cup B_f)$

$A_f = \{e \in E \mid f_e < c_e\}$

--- 順向きに 70- を増やせる
→ 流出可能枝

$B_f = \{e \in E \mid f_e > 0\}$

--- 70- を減らせる枝
→ 逆向きに流せる枝



増加道: G_f の s から t への有向パス

増加道 P の残余容量

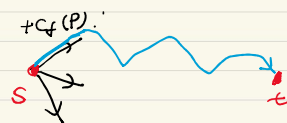
$$C_f(P) = \min \left\{ \min_{e \in A_f \cap P} \{c_e - f_e\}, \min_{\bar{e} \in B_f \cap P} f_{\bar{e}} \right\}$$

↑
e の逆向き

Augment(f, P)

$$f_e \leftarrow \begin{cases} f_e + C_f(P) & (e \in A_f \cap P) \\ f_e - C_f(P) & (\bar{e} \in B_f \cap P) \\ f_e & (\text{その他}) \end{cases}$$

val は $C_f(P)$ だけ増加



• 容量条件は満たされているか?
→ $C_f(P)$ の決め方から OK!

• 流量保存則は満たされているか?
→ OK

→ Augment 後も f は 70- 1 val は $C_f(P)$ だけ増加した

Ford-Fulkerson 法 (増加道アルゴリズム)

STEP 0: $f = 0$

STEP 1: 残余グラフ G_f を作る.

G_f に s から t へのパス P が存在するかを調べる

あるときは: P は増加道

Augment(f, P) goto STEP 1

ないときは: G_f に s から t まで到達する点全体 X

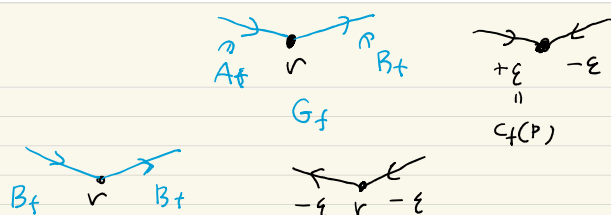
→ 終了する

→ X はカット

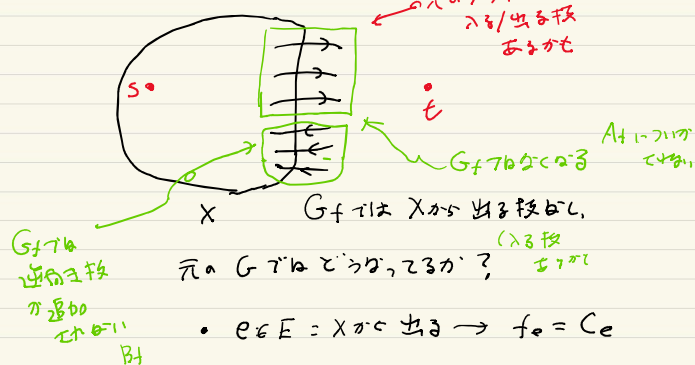
Lem 終了したとき, $\text{val } f = c(X)$

→ f は最大フロー

X は最小カット



∴ 終了したとき X はカット



• $e \in E = X$ から出る → $f_e = c_e$

• $e \in E = X$ に入る → $f_e = 0$

$$\text{val } f = \sum_{e: X \text{ から出る}} f_e - \sum_{e: X \text{ に入る}} f_e$$

$$= \sum_{e: X \text{ から出る}} c_e - \sum_{e: X \text{ に入る}} 0 = c(X)$$

$$\lambda \text{ サイズ } O((V+|E|) \log C_{\max})$$

↑
容量の最大値

- 止まるのか？

$$C_e = \text{整数 (お金の枚数)} \rightarrow O(mC)$$

↑

$$\text{よして高々 } C = \sum_{e \in S \text{ の辺}} C_e \text{ で終了}$$

↑
λ サイズの
整数サイズ

$$\textcircled{!} C_f(P) : \text{整数で } 1 \text{ 以上 } \text{val}_a + 1 \text{ の増加}$$

- 無理数が含まれていると太いことがある。

- 辺数最小の増加道

ええ、よして

$$O(nm) \text{ の反復}$$

↑ ↑
頂点 枚数
で終了



Max-flow Min-cut Thm

Thm (最大フロー-最小カット定理)

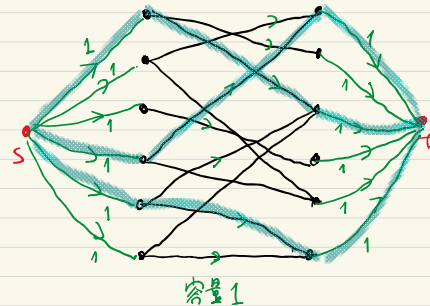
$$\text{Max val } f = \text{Min } c(X)$$

f : フロー X : カット

- $C_e = \text{整数 } (e \in E)$ のとき

整数値の最大フローが存在する。
(フローの整数性)

最小流問題 → 最大フロー問題



→ 流量が1になる辺を元のグラフの辺に交換しても

→ 2, 4, 6, 1, 2, 3 になる 交換 = val f