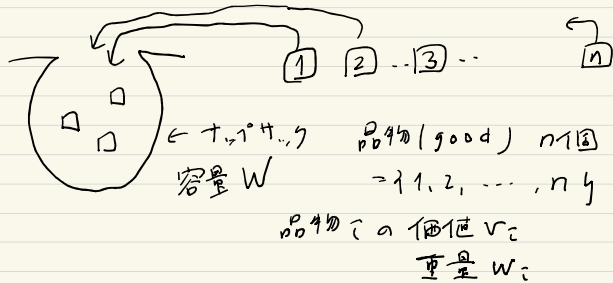


動的計画法 (DP: dynamic programming)

- ・サイズの小い問題から徐々に大きい問題
- ・帰納法的, 再帰方程式

ナップザック問題



問題

ナップザックに入れる品物
 $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$
 $w_{j_1} + w_{j_2} + \dots + w_{j_k} \leq W$
 して価値 $v_{j_1} + v_{j_2} + \dots + v_{j_k}$
 を最大にするもの
 を求めたい

仮定: w_i, W は整数 (> 0)

例: ナップザック容量 $W = 10$

品物 1, 2, 3, 4, 5, 6

品物	重量 w_i	価値 v_i
1	2	8
2	3	10
3	4	15
4	5	16
5	8	25
6	9	30

$Opt(i, U) :=$ 品物 1, 2, ..., i を容量 U の
 ナップザックに収められる最大価値

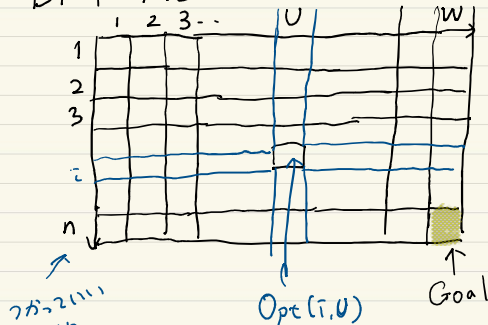
再帰方程式

$$Opt(i, U) = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \\ Opt(i-1, U) & \text{if } w_i > U \\ \max\{Opt(i-1, U), v_i + Opt(i-1, U - w_i)\} & \text{if } w_i \leq U \end{cases}$$

↑
 (i-1) まで入れたときの
 最大価値

↑
 i を入れたときの
 最大価値

DP テーブル



計算量 $O(nW)$

↑
 DP テーブルのサイズ

DP テーブル (上の例)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	8	8	8	8	8	8	8	8	8
2	0	0	8	10	10	18	18	18	18	18	18
3	0	0	8	10	15	18	18	18	18	18	18
4	0	0	8	10	15	18	18	18	18	18	18
5	0	0	8	10	15	18	18	18	18	18	18
6	0	0	8	10	15	18	18	18	18	18	18

↑
 "cell" で
 取り出した方が
 いれど品物が入る

(全点間) 最短路問題

有向グラフ $G=(V, E)$, $|V|=n$

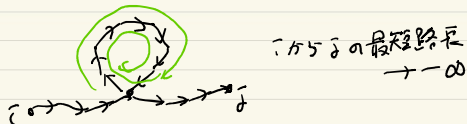
各枝 $e \in E$ の長 $l_e \leftarrow$ 負か? はない

パス P の長 $l(P) = \sum_{e \in P} l_e$

問題 各頂点間の最短路(長)を求めよ

注意 $l_e \geq 0$ (すべての枝 e) のとき Dijkstra法

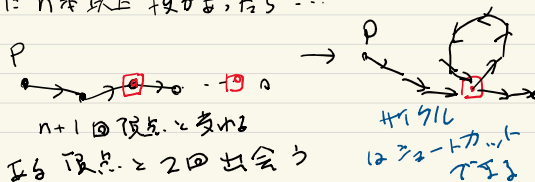
注意 "負" のサイクルがあると最短路は定まらない



仮定 負のサイクルがないとする

このとき、最短路には使われる枝の本数は $n-1$ 本以下

($\therefore$) あるパスは n 本以上枝を踏むとき...



$D_t(i, j)$ = 頂点 i から頂点 j へ t 本以下の枝をたどって到達する最短パス長

再帰方程式 (Warshall-Floyd)

$$D_t(i, j) = \min \{ D_{t-1}(i, j), \min_{\substack{e \in E \\ e=(k, j)}} \{ D_{t-1}(i, k) + l_e \} \}$$



i から j へ t 本以下の枝をたどって到達する最短パス

$\sim$ i から j へ $(t-1)$ 本以下の枝をたどって到達する最短パス

or

i から k まで $(t-1)$ 本以下の枝をたどって到達する最短パス $+ l_{(k, j)}$

$t=1, 2, \dots, n-1$ と D_t を計算する。

$D(i, j)$ = i から j への最短路長

$$D(i, j) = D_{n-1}(i, j) \quad (\text{負のサイクル無し})$$

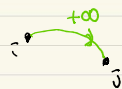
トポカル代数との関係

準備: $V = \{1, 2, \dots, n\}$

• 各頂点間の長さ l_{ij} を 0 とする

• 枝 e に対応する (i, j) に対して

長さ l_e の枝を l_{ij} とする



このとき問題がわかる。

$n \times n$ 行列 $L = (L_{ij})$ と

$$L_{ij} = l_e \text{ if } e=(i, j)$$

(i, j) 間の枝 (i, j) の長さを l_{ij} とする

$n \times n$ 行列

$$D_t = (D_t)_{ij}$$

$$(D_t)_{ij} = D_t(i, j)$$

(i, j) 間の枝 (i, j) の長さを l_{ij} とする

再帰方程式

$$(D_t)_{ij} = \min_{1 \leq k \leq n} (D_{t-1})_{ik} + L_{kj}$$

トポカル代数 (min-plus 代数)

"かけ算" が $+$

"足し算" が $\min$

この代数系

$$a * b := a + b$$

$$a \oplus b := \min(a, b)$$

$$(D_t)_{ij} = \min_{1 \leq k \leq n} (D_{t-1})_{ik} * L_{kj}$$

$$= (D_{t-1})_{i1} * L_{1j} \oplus (D_{t-1})_{i2} * L_{2j} \oplus (D_{t-1})_{i3} * L_{3j} \oplus \dots \oplus (D_{t-1})_{in} * L_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^n (D_{t-1})_{ik} * L_{kj}$$

トポロジカルソート
の下の行列積

$$D_t = D_{t-1} * L$$

$$= D_{t-2} * L * L$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \underbrace{L * L * \dots * L}_t = L^t$$

とくに

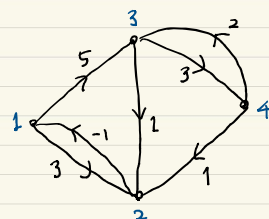
$$D = D_{n-1}$$

$$= L^{n-1} (= L^n = L^{n+1} = \dots)$$

これは負のサイクルがあるとき

$$L^{n-1} \neq L^n$$

計算量 $O(n^4)$



$$L = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & \infty \\ -1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & 3 \\ \infty & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$D = L^3 = L * L * L$$

$$= \begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & \infty \\ -1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & 3 \\ \infty & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & \infty \\ -1 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 0 & 3 \\ \infty & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 8 \\ -1 & 0 & 4 & \infty \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix}$$