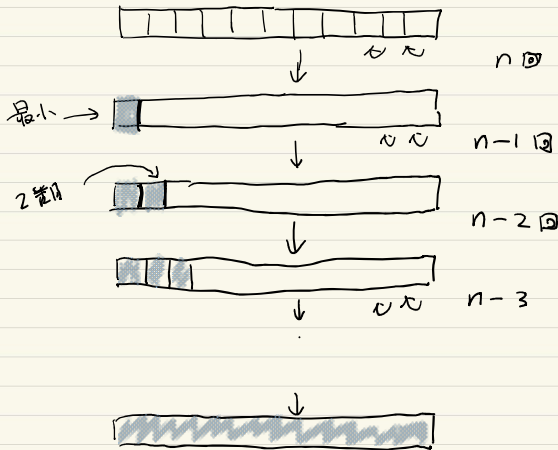


## ソートンク

長さ  $n$  の数の列を小さいもの順に並べかえる

### バブルソート

右から2つ、2つずつ、左端に1番小さいものを  
もってくる



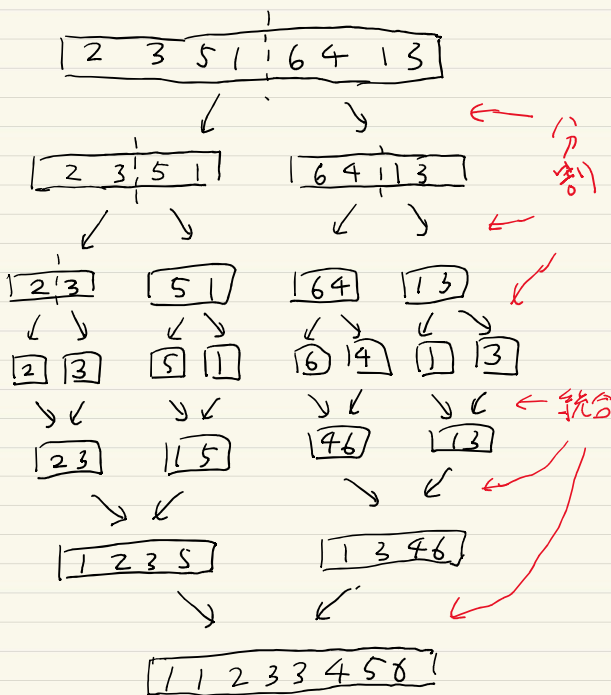
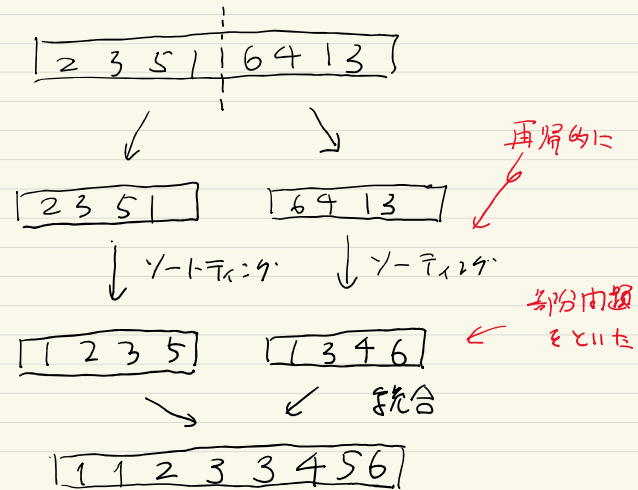
必要なセカウ/入れかえの回数 = 計算の平均

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 \\ = \frac{1}{2}n(n-1) = O(n^2)$$

## 分割統治法 (Divide-and-Conquer)

- 問題をいくつかの部分問題に分割する
- 各部分問題を再帰的に解く
- 解を統合して元の問題の解を構成

## マージソート (Merge Sort)



統合: 先頭とセカウに小さい方をリスト  
に追加

## 計算量の評価

- カニタンのため  $n = 2^k$  とする
- そうでなくとも  $2^{k-1} \leq n \leq 2^k$  とする  $k$  とすると  
リストに2倍を足かして長さを  $2^k$  にする  
→  $2^k \leq 2n$   
→ 長さ =  $O(n)$

$T(n)$  長さ  $n$  の数列に対する平均

$$\begin{cases} T(n) \leq 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + Cn \\ T(2) = C \end{cases}$$

統合の平均  
セカウにかか  
平均  
(定数)

Prop  $T(n) \leq C n \log_2 n$

→  $O(n \log_2 n)$

$n = 2^k, \frac{n}{2} = 2^{k-1}$   
 帰納法  $T(\frac{n}{2}) \leq c(\frac{n}{2}) \log_2(\frac{n}{2})$   
 が成り立つと仮定

$$\begin{aligned}
 T(n) &= 2 T(\frac{n}{2}) + cn \\
 &\leq 2c(\frac{n}{2}) \log_2(\frac{n}{2}) + cn \\
 &= cn(\log_2 n - \underbrace{\log_2 2}_1) + cn \\
 &= cn \log_2 n.
 \end{aligned}$$

実用上、最速: クイックソート  
 平均時間量  $O(n \log_2 n)$   
 一般には  $O(n^2)$

## 高速行列乗算

2つの  $n \times n$  行列の計算の時間はいくらか?

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$$

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

定義通りに計算すると...

各  $i, j$  には、 $n$  回の乗算と  $n$  回の足し算  
 $n \times n$  とする

$$\rightarrow O(n^3)$$

Strassen 1969  $O(n^{2.807})$  が出てくる!!

$n = 2^k$  とする (カニタのため)

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \text{ } \end{matrix} \right\} \frac{n}{2} \\ \left. \begin{matrix} \text{ } \end{matrix} \right\} \frac{n}{2} \end{matrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \text{ } \end{matrix} \right\} \frac{n}{2} \\ \left. \begin{matrix} \text{ } \end{matrix} \right\} \frac{n}{2} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

計算式を

$$\left[ \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \right] \cdot \left[ \begin{matrix} + \\ + \end{matrix} \right] \begin{matrix} \frac{n}{4} & \frac{n}{4} \\ \frac{n}{4} & \frac{n}{4} \end{matrix}$$

$$\begin{cases}
 P_1 = (A_{11} + A_{22}) \cdot (B_{11} + B_{22}) \\
 P_2 = (A_{21} + A_{22}) \cdot B_{11} \\
 P_3 = A_{11} \cdot (B_{12} - B_{22}) \\
 P_4 = A_{22} \cdot (B_{21} - B_{11}) \\
 P_5 = (A_{11} + A_{12}) \cdot B_{22} \\
 P_6 = (A_{21} - A_{11}) \cdot (B_{11} + B_{12}) \\
 P_7 = (A_{12} - A_{22}) \cdot (B_{21} + B_{22})
 \end{cases}$$

$P_1, P_2, \dots, P_n$  と  
計算の時間はいくらか?

$\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$  行列の積  
 $\times 7$

+ 足し算の時間  
 $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2} \times 10$

よって、次の成り立つ

$$\begin{cases}
 C_{11} = P_1 + P_4 - P_5 + P_7 \\
 C_{12} = P_3 + P_5 \\
 C_{21} = P_2 + P_4 \\
 C_{22} = P_1 + P_3 - P_2 + P_6
 \end{cases}$$

結合

足し算の時間  
 $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2} \times 9$

が成り立つ。

## Strassen の アルゴリズム

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$P_1, P_2, \dots, P_7$  を計算し,

$C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$  を得る

積の $c$ は  
2乗的  
に計算

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

## 計算量の評価

Strassen の

$T(n)$ :  $n \times n$  行列に Strassen のアルゴリズムを用いた場合

$$T(n) = 7 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + cn^2$$

定数  
足し算×  
7回

$n = 2^k$  のとき

$$T(2^k) = 7T(2^{k-1}) + c2^{2k}$$

$$\frac{T(2^k)}{2^{2k}} = \frac{7}{4} \frac{T(2^{k-1})}{2^{2(k-1)}} + c$$

$$\frac{T(2^k)}{2^{2k}} + \frac{4}{3}c = \frac{7}{4} \left( \frac{T(2^{k-1})}{2^{2(k-1)}} + \frac{4}{3}c \right)$$

$a_k = \frac{7}{4} a_{k-1} = \left(\frac{7}{4}\right)^k a_0$

$$\frac{T(2^k)}{2^{2k}} \leq \frac{T(2^k)}{2^{2k}} + \frac{4}{3}c = \left(\frac{7}{4}\right)^k \left( T(1) + \frac{4}{3}c \right)$$

$c'$

$$\rightarrow T(2^k) \leq c' 2^{2k} \left(\frac{7}{4}\right)^k$$

$$n = 2^k$$

$$\log_2 n = k \rightarrow T(n) \leq c' 7^k = c' 7^{\log_2 n} = c' n^{\log_2 7}$$

$$\rightarrow T(n) = O(n^{\log_2 7})$$

$\log_2 7 \approx 2.807$

$$\log_2 7 \approx 2.807 \dots$$

$$\begin{aligned} \log_2 7^{\log_2 n} &= \log_2 a \\ \log_2 n \log_2 7 &= \log_2 a \\ \log_2 n \log_2 7 &= \log_2 a \\ \rightarrow n^{\log_2 7} &= a \end{aligned}$$

matrix multiplication  
exponent

## 行列積計算複雑度 $\omega$

$\omega := O(n^\omega)$  時間で  $n \times n$  行列  $A, B$   
の積を計算できる最小の  $\omega$

$$\rightarrow \omega \leq 2.807 \dots \quad (\text{Strassen 1969})$$

$\vdots$

$$\omega \leq 2.376 \dots \quad (\text{Coppersmith} \\ - \text{Wignograd 1990})$$

$\vdots$

$$\omega \leq 2.37286 \dots \quad (\text{Le Gall 2014})$$

$\vdots$

$$\omega \leq 2.371339 \quad (\text{Alman, Duan, Williams} \\ \text{Xu, Xu, Zhou} \\ \text{2024})$$

$$\text{FACT} : \omega \geq 2$$