

安定マッチング問題

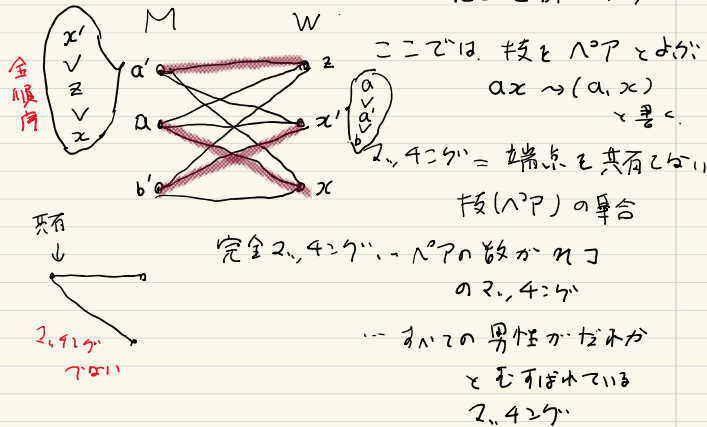
$M = n$ 人の男性

$W = n$ 人の女性

M を左側の頂点集合, W を右側の頂点集合とし、すべての左側の頂点と右側の頂点

の間には枝をまねえ

→ 完全2部グラフ



アカサス $n^2 + n^2 + n + n \sim O(n^2)$

各人が異性の「好き嫌い」の順番 (preference) を表明

選好リスト

$a \in M, x \prec_a y \Leftrightarrow a$ は y より x のほうが好き
 $x \in W, a \prec_x b \Leftrightarrow x$ は b より a のほうが好き

なるべく好きな人同士をマッチングさせたいが...

「各人が納得する」完全マッチングとあればいい

どうマッチングできるか?

S : 完全マッチング

(S における) 不安定対 (ブロックマッチング)

$\Leftrightarrow (a, x) \notin S, (a, y) \in S, (b, x) \in S$

$x \prec_a y, a \prec_x b$

a, b, x, y

S : 安定マッチング $\Leftrightarrow S$: 完全マッチング
不安定対なし

Question

安定マッチングはいつも存在するか? → YES!

安定マッチングをどう求めるか?

効率的に

→ Gale-Shapley アルゴリズム

DA アルゴリズム

Deferred Acceptance

受け入れ保留

DA アルゴリズム

$S := \emptyset$ (初期状態)

フリーでかつ選好リストが空でない $a \in M$ がいる

S が
2部グラフ

かぎり以下をくり返す

• a のリストの中より一番好きな女性 $x \in W$ とする

• x がフリーならば $(a, x) \in S$ に加える

• そうでないときは、 S から x の相手 b がいる

$\Leftrightarrow (b, x) \in S$

$a \prec_x b \rightarrow S$ から (b, x) を削除して

(a, x) を加える

b のリストから x を削除して

$b \prec_x a$ a のリストから x を削除して

(a は x を受け入れる)

DA アルゴリズムの解析

アルゴリズムの反復について

Obs • S はつねに M, N ング

- 一度プロポーズされた女性 w は
つねに拒否を拒否している

- 女性 w は M, N ング相手の順位
は単調に上がる

- 男性 m は M, N ングプロポーズする女性
の順位は単調に下がる

Prop DA アルゴは高々 n^2 回の反復で終了

- ☺ 同じ相手に送るプロポーズの数は n^2
→ プロポーズの場合の数 n^2

Lem $a \in M$ がフリーならば a はプロポーズ

してない女性がいる

(リストが空でない)

- ☺ リストが空
完全 M, N ングだから
 a はプロポーズしている!

Cor DA アルゴリズムの終了時 S は完全
 M, N ング

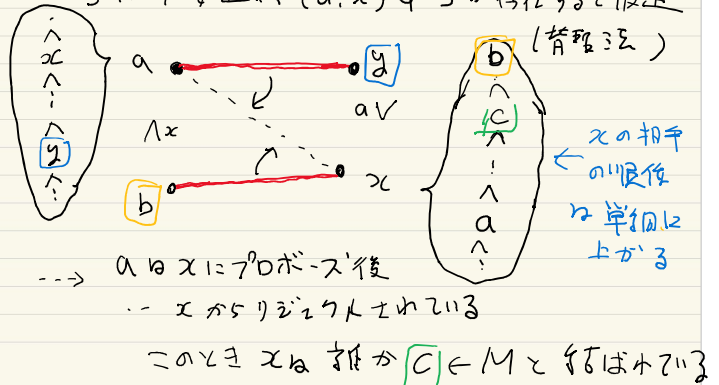
Thm DA アルゴリズム終了時 S は安定 M, N ング
(→ 存在性 & アルゴリズム)
効率的

☺ S : アルゴ終了時の完全 M, N ング

→ 安定であることを示す

→ 不安定な対がないことを示す

S は不安定な対 (a, x) が S に存在すると仮定



$b \leq_x a$ が成立

→ 最初の仮定 $a \leq_x b$ より $a \leq_x b$ が成立

- 安定 M, N ングは一発で決まる
- DA アルゴはいつも同じ安定 M, N ングを
YES 出力するか?
→ いちいち「特別な」安定 M, N ングを出力

$a \in M$ の妥当な相手 $\Leftrightarrow x \in W$ である

ある安定 M, N ング S に対して

$(a, x) \in S$

(安定 M, N ングで拒否されている相手)

$\text{best}(a)$: a の妥当な相手の中で一番好きな相手

$S^* = \{(a, \text{best}(a)) \mid a \in M\}$

各男性 a に a の最も好きな相手とプロポーズ

→ M, N ングが安定か?

Thm DA アルゴはいつも S^* を出力する。
(→ S^* は安定 M, N ング)

☺ $S \neq S^*$ を仮定 (背理法)

→ ある $a \in M$ は妥当な相手 x からリジェクト
される瞬間がある

