

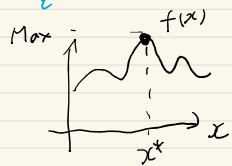
現代数学入門 (組合せ最適化とアルゴリズム入門)

平井 広志 (多元数理科学)

Optimization

最適化理論とは?

Max $f(x)$
 $x \in X$
 最大値をとる.
 集合 X は x と含む

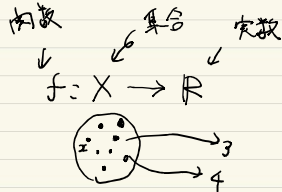


最適化問題

最大値を求めよ
 と達成する $x^* \in X$
 最適解

〜 数ある可能性・選択指の中から
 「効率的」一番良いものを選び
 それを求める手法の研究
 アルゴリズム
 計算機で走らせたいと想定している

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$



連続最適化: 無限個の中から
 実行可能値, 連続, 凸性

離散最適化: 有限個の中から
 (組合せ) X は有限集合



離散数学
 グラフ理論



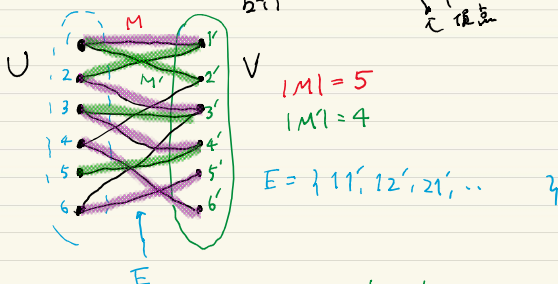
組合せ最適化
 最適化理論

TCS
 理論計算機科学
 計算量
 アルゴリズム
 $P \neq NP$?

マッチング

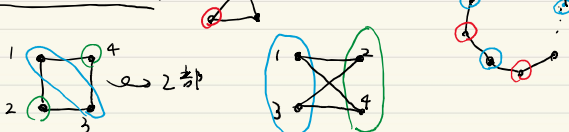
2部グラフ $G = (U, V; E)$

↑
 頂点の集合が
 2つに分割されている
 枝はその分割の向いにある
 グラフ G : 頂点, 枝の集合
 枝 $e = xy$
 x 頂点
 y 頂点



$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $V = \{1', 2', 3', 4', 5', 6'\}$

2部ではない例



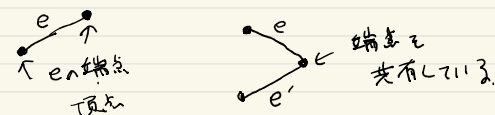
Exe k -サイクルが2部 $\Leftrightarrow k$ が偶数

Def (マッチング)

$A \subseteq B$
 A は B の部分集合



端点と共有しない枝の部分集合 $M \subseteq E$



最大マッチング問題

入力: 2部グラフ $G = (U, V; E)$

出力: 最大サイズのマッチング $M \subseteq E$

$|M| \leftarrow$ マッチングを構成する枝の個数

Max. $|M|$ s.t. M は G のマッチング

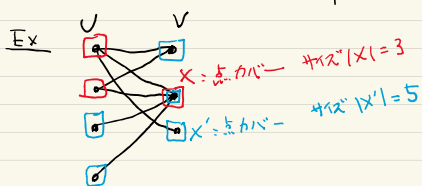
どうやって最大マッチングを求めようか?

正確な解法: 枝の部分集合をすべて試してみれば
 マッチングになっているものがどうかチェック
 マッチングになっているもののなかから
 最大サイズのものをを選ぶ
 指数時間アルゴリズム
 平均 $2^{|E|}$

“効率的な” アルゴリズムを設計したい!

Def (頂点カバー)

$\Leftrightarrow$ 頂点部分集合 $\subseteq U \cup V$
def であら、2つの枝の端点と交わる



Lem (弱双対性)

任意の $M: 2, 4 \rightarrow 2^n, C: \text{点カバー}$

$$|M| \leq |C|$$

Cor $M: 2, 4 \rightarrow 2^n$

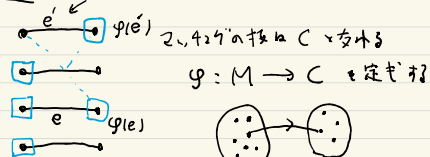
もしも 点カバー C があつて $|M| = |C|$ なら

M は最大

$\therefore M'$ とある $2, 4 \rightarrow 2^n$ とすると

$$|M'| \leq |C| = |M|$$

Lem の証明 $M: 2, 4 \rightarrow 2^n, C: \text{カバー}$



$$\phi(e) := e \text{ と交わる } C \text{ の点 (1つと55-55)}$$

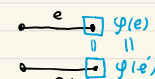
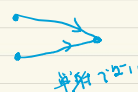
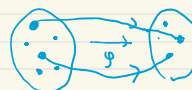
Claim

ϕ は単射 $\rightarrow |M| \leq |C|$

$\therefore$ 背理法: 単射でないときは

$$e, e' \in M, e \neq e' \Rightarrow \phi(e) = \phi(e')$$

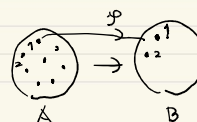
単射 $e \neq e' \Rightarrow \phi(e) \neq \phi(e')$



$\rightarrow$ 端点 $\phi(e) = \phi(e')$ が共有

M が $2, 4 \rightarrow 2^n$ であることに注意

$\phi: A \rightarrow B$ 単射 なら $|A| \leq |B|$



最大 $2, 4 \rightarrow 2^n$ を求める増加道アルゴリズム

方針: $M \rightarrow$ サイズ 大きくする
 できなくするとき

$|M| = |C|$ となるカバー C が見つかる

Def (M-交互道)

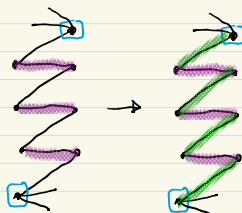
$M: 2, 4 \rightarrow 2^n$

M -交互道 $\Leftrightarrow$ (道) G 上のパスであつて M の枝と M でない枝が

交互に表れるもの

パスの両端点が M の端点になつて

いかに M -増加道 といふ



OBS

P
 M -増加道に P を加へると

$2, 4 \rightarrow 2^n$ のサイズが1ふえる!

$M \rightarrow M \Delta P$ 2, 4 \rightarrow 2^n
対称差

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$



参考文献

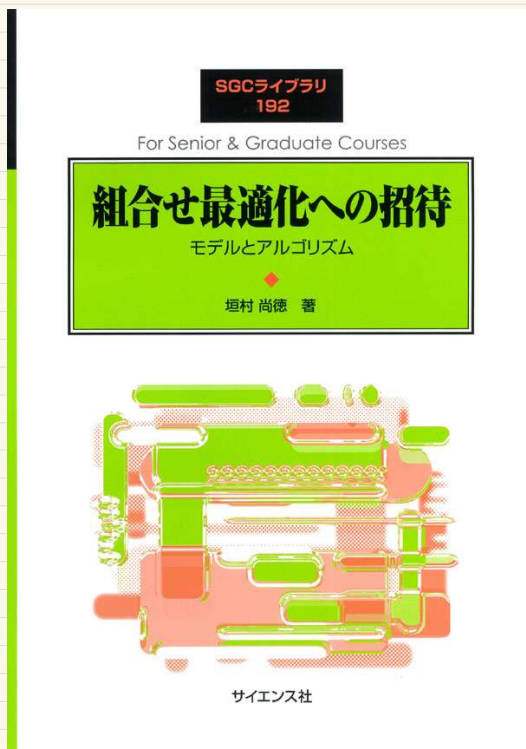


出版社のページ

<https://www.kyoritsu-pub.co.jp/book/b10010675.html>

名大図書館の所蔵状況

https://m-opac.nul.nagoya-u.ac.jp/iwis0023opc/catdbi.do?pkey=WB01833169&formkeyno=99023548cGcd6nJoRe&startpos=3&hitcnt=4&tab_num=0



出版社のページ

<https://www.saiensu.co.jp/search/?isbn=978-4-7819-1609-5&y=2024>

名大図書館の所蔵状況

https://m-opac.nul.nagoya-u.ac.jp/iwis0023opc/catdbi.do?pkey=WB03864387&formkeyno=99023937klSip81Hs6&startpos=1&hitcnt=2&tab_num=0