

2 連立1次方程式の解法

2.1 2変数連立1次方程式の解

2変数 x, y に関する連立1次方程式を考える.

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \quad (2.1)$$

解がない場合, 一意に定まる場合, 無数に存在する場合がある.

例. (1) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$

解答. (1) $x = 4, y = 3$. (2) 解なし. (3) $x = 10 - 2t, y = t$.

2.1.1 行列の積による表現

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

を用いて, (2.1) を

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} \tag{2.2}$$

と書くことができる.

(2.2) の A : 係数行列.

拡大係数行列

$$\tilde{A} = \left[A \mid \boldsymbol{p} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & p \\ c & d & q \end{array} \right].$$

例の(1)を行列で表現すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

左辺の係数行列の逆行列は(1.4)より,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 1 \cdot 2} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

これを(2.5)に左からかけて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

例(2)と(3)では行列式 $1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$ となり逆行列が存在しない。
このとき、係数行列だけでは「解なし」か「解が無数に存在」を判別できない。

2.1.2 拡大係数行列の利用

例(1)を考える.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 20 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{A}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{B}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{C}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \quad (2.8)$$

操作①: 第2行を2で割る.

操作②: 第2行から第1行を引く.

操作③: 第1行から第2行を引く.

変形結果より解 $x = 4, y = 3$ が得られる.

もとの係数行列 A に対応する部分が単位行列 E になるように変形している.

③の操作ののち, 一番右の列に解が得られている.

連立方程式を解くための計算を係数だけに注目して行っている.

各操作の前後で連立方程式の同値性が保たれていて, 逆にたどって前に戻ることができる.

例(2):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 20 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{\text{A}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{\text{B}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

最後の行が $0 \cdot x + 0 \cdot y = 3$ に対応. 矛盾. つまり解なし.

例(3):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{\text{A}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{\text{B}}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

最後の行列の右下が0. 矛盾は生じず, 解が存在.

2.1.3 行列の階数

定義 行基本変形:

1. ある行に0でない数をかける.
2. ある行に他のある行の定数倍を加える.
3. 2つの行を入れ換える.

これらの操作を表す記号を定義しておく.

- 操作I($i; k$): 第 i 行を k 倍する ($k \neq 0$).
- 操作II($i \leftarrow j; k$): 第 i 行に第 j 行の k 倍を加える.
- 操作III($i \leftrightarrow j$): 第 i 行と第 j 行を入れ換える.

列基本変形も同様 (後述).

掃き出し法: (2.8) のように拡大係数行列に行基本変形を適用することで解を求める方法.

2×2 行列の行基本変形は以下の行列を左からかけることに対応:

$$\text{I}(1; k): \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{I}(2; k): \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$\text{II}(1 \leftarrow 2; k): \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{II}(2 \leftarrow 1; k): \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{III}(1 \leftrightarrow 2): \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

例. (2.8) の各操作は次の行列を左からかけることに対応:

$$\text{操作}\textcircled{\text{A}}: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \text{操作}\textcircled{\text{B}}: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{操作}\textcircled{\text{C}}: \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

定義（行列の階数）

$m \times n$ 行列 A に行基本変形を繰り返し適用することで

- 第 k 行までは各行に 0 でない成分が 1 つ以上存在,
- 第 $k + 1$ 行以下の行の成分は全て 0

となるような k ($0 \leq k \leq m$) の最小値を A の **階数** (rank) とよび, $\text{rank}(A)$, $r(A)$ などで表す.

講義では $\text{rank}(A)$ の方を使う.

一般の $m \times n$ 行列の階数の計算法については後で 2.3 節できちんと説明するが, 掃き出し法で行列を階段状に変形した結果残っている非ゼロ行の本数が階数となり, 基本変形の仕方によらないことが知られているので, 「 k の最小値」のところはそれほど気にしなくてよい.

3つの例についてrankを計算.

$$(1) \tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 20 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right]. \quad \text{rank}(\tilde{A}) = 2.$$

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right]. \quad \text{rank}(A) = 2.$$

$$(2) \tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 20 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{array} \right]. \quad \text{rank}(\tilde{A}) = 2.$$

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \right]. \quad \text{rank}(A) = 1.$$

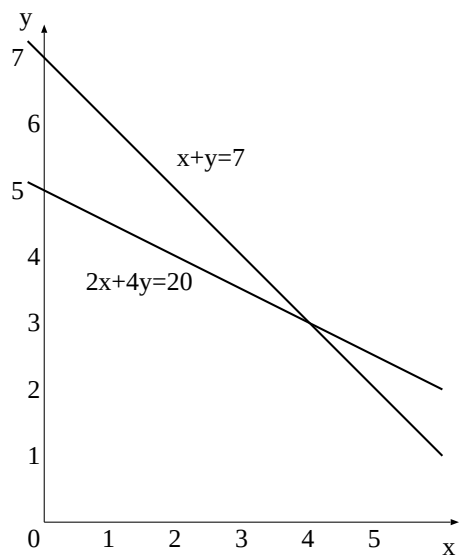
$$(3) \tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad \text{rank}(\tilde{A}) = 1.$$

$$A = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{array} \right]. \quad \text{rank}(A) = 1.$$

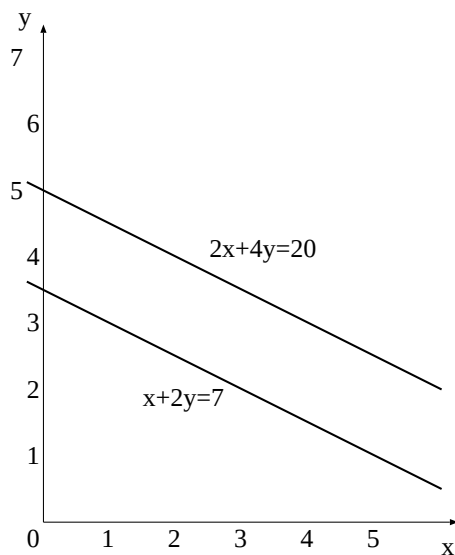
連立方程式の解の個数と rank の関係

	未知数の個数		$\text{rank}(\tilde{A})$		$\text{rank}(A)$	解の個数
(1)	2	=	2	=	2	ただ1つ存在
(2)	2	=	2	>	1	なし
(3)	2	>	1	=	1	無数に存在 (任意定数を1個含む)

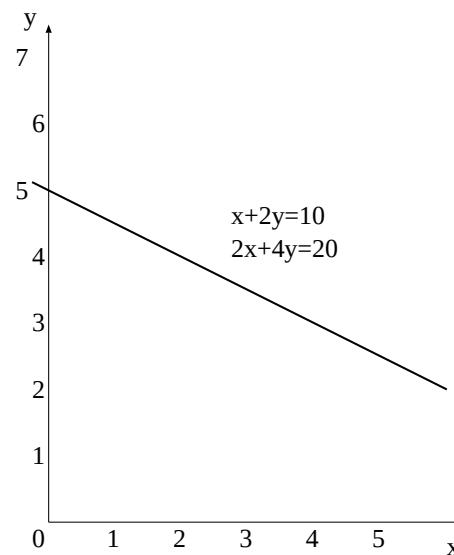
幾何学的意味



(1)



(2)



(3)

(1) では交点 (4, 3) 存在, (2) では平行な 2 直線で交点がない, (3) では 2 直線が一致して全ての点がもとの 2 式を満たす.

$\text{rank}(A) < 2 \rightarrow 2$ 直線は平行. $\text{rank}(\tilde{A}) < 2 \rightarrow 2$ 直線が一致.

2.2 3変数連立方程式の解

前節の考察を3変数の場合に拡張する.

例題. 次の連立1次方程式を掃き出し法を用いて解け.

$$\begin{array}{ll} (1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 5y + 7z = 5 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{cases} & (2) \begin{cases} 2x + 5y + 7z = 5 \\ x + 3y + 4z = 2 \\ 3x + 5y + 8z = 4 \end{cases} \\ (3) \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 5y + 7z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases} & (4) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 4y + 6z = 2 \\ 5x + 10y + 15z = 3 \end{cases} \\ (5) \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 4y + 6z = 6 \\ 4x + 8y + 12z = 12 \end{cases} & \end{array}$$

2変数の場合を参考に各自計算してみよ. $\text{rank}(\tilde{A})$ と $\text{rank}(A)$ の値も計算せよ. 軸 (pivot) を決めてその列の軸以外を0にして行く操作を繰り返して階段状にしていけばよい.

例題の解の個数と rank の関係

	未知数の個数		$\text{rank}(\tilde{A})$		$\text{rank}(A)$	解の個数
()	3	>	1	=	1	無数に存在 (任意定数を2個含む)
()	3	>	2	>	1	なし
()	3	>	2	=	2	無数に存在 (任意定数を1個含む)
()	3	=	3	>	2	なし
()	3	=	3	=	3	ただ1つ存在

↑ 例題の (1) から (5) はそれぞれどの場合に相当するか? かっこ内に番号を記せ.

$\text{rank}(A) < \text{rank}(\tilde{A}) \rightarrow$ 解なし.

$\text{rank}(A) = \text{rank}(\tilde{A}) \rightarrow$ 解が存在し, $3 - \text{rank}(A)$ 個の任意定数を含む.

2変数の場合を参考に幾何学的な意味を考えよ. すなわち上の5つの各場合に3平面はどう交わるか?

掃き出し法と逆行列

3×3 行列 A に対して

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

とおくと, $AA^{-1} = E$ は次の3つの連立1次方程式と同値:

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

これを以下の拡大係数行列を用いてまとめて解くことができる:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

連立方程式を解くために行う掃き出し操作は左側を単位行列に持って行くように行う. 1つめの連立方程式を解くために行った掃き出し操作を適用すれば2つめと3つめも解ける. これをまとめて書いてだけ.

掃き出し法による逆行列の求め方

Step 1. 与えられた正則な n 次正方行列 A に対し, $\left[A \mid E \right]$ を作る.

Step 2. $\left[A \mid E \right]$ に行基本変形を適用して, $\left[E \mid B \right]$ という形に変形する. 得られた B が A の逆行列である.

A が正則でない場合は左側が E にならず, $\text{rank}(A) < n$ であることが分かる.

例題.

行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ と単位行列 E に対して

$P = (E - A)(E + A)^{-1}$ を計算し, P が直交行列になっていること (i.e., $P^t P = {}^t P P = E$) を確認せよ.

参考 実交代行列 A (${}^tA = -A$) に対して $E + A$ は正則であり,

$$P = (E - A)(E + A)^{-1}$$

は直交行列になる (つまり $P^tP = {}^tPP = E$) .

また, 直交行列 P に対して $E + P$ が正則であれば,

$$A = (E - P)(E + P)^{-1}$$

は交代行列になる. このような変換を **ケーリー (Cayley) 変換** という.

演習問題を解いて理解を深めよ.

2.3 n 変数連立1次方程式の解と行列の階数

前節までの結果を n 変数の場合に拡張.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \quad (2.15)$$

注. $n \neq m$ であってもよい. # 前節までは $n = m$ である場合のみを見てきた.

(2.15) に対する係数行列 A と拡大係数行列 $\tilde{A}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

性質 2.3.1 連立方程式 (2.15) の解の個数

- $\text{rank}(\tilde{A}) > \text{rank}(A)$ の場合

(2.15) は解を持たない（**解不能**，**条件過剰**という）。

- $\text{rank}(\tilde{A}) = \text{rank}(A) = n$ の場合

(2.15) は解を持ち，かつ一意である。

- $\text{rank}(\tilde{A}) = \text{rank}(A) = r (< n)$ の場合

(2.15) は解を持ち， $n - r$ 個の任意定数を含む（**解不定**，**条件不足**という）。

$n - \text{rank}(A)$ を**解の自由度**という。

証明は行わない．例えば齋藤正彦「線型代数入門」の2章§5「一次方程式系」の証明は解の構成法を与える。

3次元 ($n = 3$) の場合の自由度のイメージ: 自由度0なら解は1点に定まり，自由度1なら直線，2なら平面上に無数に解がある。

定義（階段行列）

$m \times n$ 行列 A の第 i 行を左から見ていき、はじめて 0 でない成分が現れるまでの 0 の個数を l_i とする.

$$\exists a \in \{1, 2, \dots, m\}, l_1 < l_2 < \dots < l_a = l_{a+1} = \dots = l_m = n$$

$$\text{または } l_1 < l_2 < \dots < l_m < n$$

を満たすとき、 A を **階段行列** という.

記号 $\exists$ と $\forall$: e.g., 「 $\exists x \in [a, b], f(x) = 0$ 」は「 $f(x) = 0$ となる x が区間 $[a, b]$ 内に**存在する**」ことを,
「 $\forall x \in [a, b], f(x) = 0$ 」は「区間 $[a, b]$ 内の**すべての** x に対して $f(x) = 0$ が成立する」ことを意味する.

階段行列は echelon matrix か matrix in echelon form.

次に手続き ECHELON を説明する準備として空行列 (empty matrix) を定義.

空行列: 行または列（あるいはその両方）の数が 0 であるような行列.

階段行列への変形法

以下では a_{ij} は変形を加えた各時点での (i, j) 成分を表すものとする.

ECHELON(A)

Step 1. $A = O$ あるいは A が空行列ならば A を出力して終了.

Step 2. 0でない成分を1つ以上持つ最も左の列を第 l_1+1 列とする. $a_{1,l_1+1} = 0$ ならば $a_{k,l_1+1} \neq 0$ であるような k に対して $\text{III}(1 \leftrightarrow k)$ を行う. # 1行と k 行を入換

Step 3. $i = 2, 3, \dots, m$ に対して, $\text{II}(i \leftarrow 1; -a_{i,l_1+1}/a_{1,l_1+1})$ を行う.

Step 2の結果 $a_{1,l_1+1} \neq 0$ となっている. 第 i 行から第1行の $a_{i,l_1+1}/a_{1,l_1+1}$ 倍を引く.

Step 4. 第1列～第 l_1+1 列及び第1行を取り除いて得られる行列を A_1 とおく.

Step 5. $A'_1 := \text{ECHELON}(A_1)$ としたのち # 講義では $:=$ で代入を表す.

$$A' := \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1,l_1+1} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{array} \right] \begin{array}{c} \\ \\ A'_1 \\ \end{array}$$

とする. A' を出力して終了.

性質 2.3.2 $\text{rank}(A) =$ 手続き ECHELON(A) により得られた行列のうち 0 でない成分を含む行の数.

注. Step 2 の a_{k,l_1+1} (**軸, pivot**) の選び方により得られる階段行列は異なる可能性がある. しかし得られる rank の値は軸の選び方に寄らないことが知られている.

例題. 次の行列を階段行列に変形し, 階数を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -2 & 5 & 16 \end{bmatrix}$$

定義 列基本変形:

1. ある列に0でない数をかける.
2. ある列に他のある列の定数倍を加える.
3. 2つの列を入れ換える.

これらの操作を表す記号を定義しておく.

- 操作 $I'(i; k)$: 第 i 列を k 倍する ($k \neq 0$).
- 操作 $II'(i \leftarrow j; k)$: 第 i 列に第 j 列の k 倍を加える.
- 操作 $III'(i \leftrightarrow j)$: 第 i 列と第 j 列を入れ換える.

性質 2.3.3 列基本変形により階数は変化しない.

注. 連立方程式の解を求める場合には列基本変形を安易に適用してはならない.

rank の計算は行と列の基本変形を同時に行って行列を階段状にすることも求められる．なお，これまでの rank の計算法では，得られる rank の値が行基本変形の仕方に寄らないことを証明しなかったが，次の定義についてはこれを証明する．そのための準備をいくつか行う．

準備 # 行基本変形を，左から行列をかけることで実現できることに触れた．これが一般的にできることを見るために，左からかける行列を行ベクトルに分解して考える．

$$\begin{aligned} [\alpha, \beta, \gamma] \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} &= [\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3, \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3, \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3] \\ &= \alpha[a_1, b_1, c_1] + \beta[a_2, b_2, c_2] + \gamma[a_3, b_3, c_3]. \end{aligned}$$

行列に左から行ベクトルをかける

= 行列の各行をベクトルとみて，それらに係数をかけて加える

列についても同様に以下．

$$\text{例. } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + (-1) \cdot (-7) \\ 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-7) \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-7) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

行列に右から列ベクトルをかける

= 行列の各列をベクトルとみて，それらに係数をかけて加える

行基本変形を実現する行列 e.g., $5 \times n$ 行列に対する行基本変形 (0は省略)

$$\begin{array}{ccc} \text{I}(3; k): \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & k & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} & \text{II}(4 \leftarrow 2; k): \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & k & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} & \text{III}(2 \leftrightarrow 5): \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \end{bmatrix} \end{array}$$

これらを左からかけることで行基本変形を実現.

これらの行列の各行ベクトルの意味を, 上で説明した「ベクトルを左からかける」意味で理解し, 第 i 行めに対するそのような積の結果が計算後の行列の第 i 行に現れることを想像せよ.

性質 2.3.4

行基本変形を表す行列は正則. 逆行列は元に戻す操作に対応する行列.

例. $\text{I}(i; k) \leftrightarrow \text{I}(i; 1/k)$ # 第 i 行を k 倍 $\leftrightarrow k$ で割る.

$\text{II}(i \leftarrow j; k) \leftrightarrow \text{II}(i \leftarrow j; -k)$ # 第 j 行の k 倍を第 i 行に加える $\leftrightarrow j$ 行の k 倍を i 行から引く.

$\text{III}(i \leftrightarrow j) \leftrightarrow \text{III}(i \leftrightarrow j)$ # 第 i 行と第 j 行を入れ換える $\leftrightarrow$ もう一度それらを入れ換える

列基本変形: 同様の正則な行列を右からかけることで実現できる.

補題2.3.1 $A, X: n$ 次正方行列.

$$\exists X, (XA = E \vee AX = E) \implies A \text{ は正則}, X = A^{-1}.$$

$P \vee Q$ は P と Q の少なくとも一方が真という意味.

証明. $XA = E$ を仮定する場合. n に関する数学的帰納法. $n = 1$ ならば自明.
以下 $n > 1$ とし, $n - 1$ 次行列では補題は正しいと仮定.

A は零行列ではないから行と列の入れ替えを必要なら適宜行い, a_{11} が 0 でないようにする. $I(1; 1/a_{11})$ を行ったのち $(1, 1)$ を軸に第 1 行と第 1 列を掃き出せば

$$B = \begin{bmatrix} 1 & {}^t\mathbf{o} \\ \mathbf{o} & A_1 \end{bmatrix} \quad \# \mathbf{o} \text{ は全ての要素が 0 の列ベクトル.}$$

の形にできる. これらの行と列の基本変形を行う行列をそれぞれ P と Q とすれば $PAQ = B$. B の区分けに応じて

$$Q^{-1}XP^{-1} = \begin{bmatrix} u & {}^t\mathbf{z} \\ \mathbf{y} & X_1 \end{bmatrix}$$

と区別け. $(Q^{-1}XP^{-1})(PAQ) = Q^{-1}XAQ = Q^{-1}EQ = E$ であるから

$$\begin{bmatrix} 1 & {}^t\mathbf{o} \\ \mathbf{o} & E_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & {}^t\mathbf{z} \\ \mathbf{y} & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & {}^t\mathbf{o} \\ \mathbf{o} & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & {}^t\mathbf{z}A_1 \\ \mathbf{y} & X_1A_1 \end{bmatrix}.$$

したがって $X_1A_1 = E_{n-1}$. よって帰納法の仮定により A_1 は正則.

$$\begin{bmatrix} 1 & {}^t\mathbf{o} \\ \mathbf{o} & A_1^{-1} \end{bmatrix}$$

が B の逆行列になることは容易に確認できるから B は正則.

$A = P^{-1}BQ^{-1}$ だから A も正則, i.e., 逆行列 A^{-1} が存在.

$XA = E$ の右から A^{-1} をかけると $X = A^{-1}$.

$AX = E$ を仮定する場合は転置して同様の議論をすればよい.

□

定理2.3.1 $m \times n$ 行列 A に行と列の基本変形を何回か施すことにより，標準形

$$F_{m,n}(r) = \begin{bmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{r \text{ 個}}$

に変換できる． r の値は A のみによって定まり，基本変形の仕方によらない．

証明. 標準形にできること. # 講義ではこちらは使わず次ページの方で説明. 本質は同じ.

数学的帰納法. $m = 1$ or $n = 1$ ならば自明.

1列か1行なので非零要素があれば先頭に持ってきて1にし2行/列目以下を掃き出せばよい.

以下 $m > 1$ かつ $n > 1$ とし,

$(m - 1) \times (n - 1)$ 行列は標準形に変形できると仮定.

$A = O$ なら A 自身が標準形 $F_{m,n}(0)$.

$A \neq O$ のとき, 行と列の入れ替えを必要なら適宜行い, a_{11} が0でないようにする. $I(1; 1/a_{11})$ を行ったのち $(1,1)$ を軸に第1行と第1列を掃き出せば

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & A_1 \end{bmatrix} \quad \# \text{ すなわち } \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & A_1 & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

の形にできる. 帰納法の仮定より A_1 は標準形に変形できる. したがって A も標準形に変形できる.

標準形にできること.

$A = O$ なら A 自身が標準形 $F_{m,n}(0)$.

$A \neq O$ のとき, 行と列の入れ替えを必要なら適宜行い, a_{11} が 0 でないようにする. $I(1; 1/a_{11})$ を行ったのち $(1,1)$ を軸に第 1 行と第 1 列を掃き出せば

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right] \quad (*)$$

の形にできる.

$A_1 = O$ なら $(*)$ は標準形 $F_{m,n}(1)$.

$A_1 \neq O$ ならば同様の操作で

つまり行と列を適宜入れ替えて $a_{22} \neq 0$ とし, $I(1; 1/a_{22})$ を行ったのち $(2,2)$ を軸に掃き出すことで.

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A_2 & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right]$$

の形にできる. 以上を可能な限り続ければ標準形に達する.

標準形が一意であること．二通りの標準形 $F(r) = F_{m,n}(r)$ と $F(s) = F_{m,n}(s)$ を持つと仮定．（# つまり基本変形の仕方により行き着いた先が異なると仮定．）

$\text{wlog } r \leq s$. （# wlog は without loss of generality の略で，w.l.o.g. と書くこともある．）

基本変形は可逆だから $F(r)$ と $F(s)$ は一連の基本変形によって移りあう．

（# とともに A から基本変形によって得られたものだから．）

したがって m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q により

$$F(s) = PF(r)Q$$

と表される． P, Q の行と列を r 番目で切って区分けし

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

とすれば

$$F(s) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{bmatrix}.$$

$r \leq s$ の仮定より

$$P_{11}Q_{11} = E_r, \quad P_{11}Q_{12} = O_{r,n-r}, \quad P_{21}Q_{11} = O_{m-r,r}.$$

補題 2.3.1 より P_{11} と Q_{11} は正則. したがって $Q_{12} = O_{r,n-r}$, $P_{21} = O_{m-r,r}$. これらより $P_{21}Q_{12} = O_{m-r,n-r}$. これは $s = r$ を意味する. $\square$

性質 2.3.5 $r = \text{rank}(A)$ (rank の定義のひとつ).

定理 2.3.2 A : n 次正方行列. A が正則 $\iff \text{rank}(A) = n$.

証明. $PAQ = F_{n,n}(r)$ とする (P と Q は正則).

A が正則ならば PAQ も正則だから $r = n$ でなければならない.

$r < n$ なら $F_{n,n}(r)$ に 0 のみの行 (列) ができるが, そのような行 (列) があると逆行列は存在し得ない.

P と Q は正則 (性質 2.3.4). 正則行列の積は正則. B と C が正則なら $C^{-1}B^{-1}$ が BC の逆行列になるから.

$r = n$ ならば $F_{n,n}(r) = E$ であるから $A = P^{-1}EQ^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$ となる.

したがって A は正則. $\square$

行列の階数のさまざまな定義

- 行基本変形および列基本変形により階段行列に変形したときの、0でない成分を含む行の個数
- 値が0でない**小行列式** (3.2節) の最大次数
- **1次独立** (4.3節) な行ベクトルの最大個数
- 1次独立な列ベクトルの最大個数
- 行ベクトルの張る**線形空間** (4.2節) の**次元** (4.3節)
- 列ベクトルの張る線形空間の次元
- 行列の表す**線形写像**の**像空間** (5.1節) の次元

これらが全て同値であることの証明は講義では行わない。齋藤著の本などを参照。
括弧の中の節番号は現在未定義の言葉の説明を行う節番号で、4章以降は後期。

2.4 掃き出し法とLU分解

定義 対角成分が全て1の下三角行列を単位下三角行列とよぶ。単位上三角行列も同様。 # あまり一般的な言葉ではないかもしれない。数学辞典第4版のLU分解の説明には単位左下3角行列，右上3角行列という言葉が使われている。

性質 2.4.1 下三角（単位下三角）行列同士の積はやはり下三角（単位下三角）行列になる。

↑括弧の対応の意味: 「下三角同士の積は下三角，単位下三角同士の積は単位下三角」。

証明は演習問題にある。以下直感的説明: 単位下三角行列 A と B 。 AB の第 i 行めは A の第 i 行めを左から B にかけてもの。これは， A の第 i 行めの最初の $i-1$ 個の要素は非ゼロ， i 個めの要素は1， それ以降は0だから， B の最初の $i-1$ 行の重み付き和と B の第 i 行を（重み無しで）加えたものとなり， 最初の $i-1$ 個の要素は非ゼロ， i 個めの要素は1， それ以降は0となる。

性質 2.4.2 単位下三角行列は正則で，逆行列はやはり単位下三角行列になる．

性質 2.4.3 正則な下三角行列の逆行列は下三角行列になる．

性質 2.4.4 性質 2.4.1–2.4.3 は上三角行列に対しても成り立つ．

これらの証明は演習問題にある．

LU分解 行基本変形 $\Pi(j \leftarrow i; k)$ ($j > i$) は単位下三角行列によって表現できる．このような操作のみによって正方行列 A を上三角行列に変換する過程を考える．

例．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Pi(3 \leftarrow 1; -2)]{(\text{ア}) \Pi(2 \leftarrow 1; 2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Pi(3 \leftarrow 2; -2)]{(\text{イ})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = U \text{ とおく.}$$

$$(\text{ア}) \text{を表す行列: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_1 \quad \# \text{ と置く.}$$

$$(\text{イ}) \text{を表す行列: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = P_2 \quad \# (\text{ア}) \text{ と } (\text{イ}) \text{ を表す行列がともに単位下三角行列であることを注意.}$$

$$P = P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{とおく.} \quad \# \text{ 性質 2.4.1 から } P \text{ も } \\ \text{やはり単位下三角行列}$$

P^{-1} を求める.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\text{II}(3 \leftarrow 1; 6)]{\text{II}(2 \leftarrow 1; -2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{II}(3 \leftarrow 2; 2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = L \text{とおく.} \quad \# \text{ 性質 2.4.2 から } P^{-1} \text{ もやはり単位下三角行列.}$$

$PA = P_2 P_1 A = U$ だから $A = P^{-1}U = LU$. 実際に計算してみると

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} = A.$$

このように A を単位下三角行列 L と上三角行列 U の積に分解できる. いつでもできるわけではない. A から U への変換の各ステップにおける軸が非ゼロであれば可能. # そうでないとうまく行かない. そのようなときはそうなるように行または列を入れ換えた行列に対して分解可能.

定理 2.4.1 n 次正方行列 A の部分行列 (小行列) で最初の k 個の行と列よりなるものを A_k と記す. $A_1, A_2, \dots, A_n$ が全て正則ならば, 単位下三角行列 L と正則な上三角行列 U を用いて $A = LU$ と一意的に表せる.

証明. $A = LU$ と書けること. n に関する数学的帰納法. $n = 1$ ならば明らか.

以下 $n > 1$. $A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{c} & d \end{bmatrix}$ と分け.

定理の仮定より $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ は正則だから帰納法の仮定より単位下三角行列 L_{n-1} と正則な上三角行列 U_{n-1} を用いて $A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$ と表せる.

$$L = \begin{bmatrix} L_{n-1} & \mathbf{o} \\ {}^t\mathbf{c}A_{n-1}^{-1}L_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_{n-1} & U_{n-1}A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{o} & d - {}^t\mathbf{c}A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

とおくと, L は単位下三角行列, U は上三角行列.

$$\begin{aligned} LU &= \begin{bmatrix} L_{n-1}U_{n-1} & L_{n-1}U_{n-1}A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{c}A_{n-1}^{-1}L_{n-1}U_{n-1} & {}^t\mathbf{c}A_{n-1}^{-1}L_{n-1}U_{n-1}A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} + d - {}^t\mathbf{c}A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{n-1}A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{c}A_{n-1}^{-1}A_{n-1} & {}^t\mathbf{c}A_{n-1}^{-1}A_{n-1}A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} + d - {}^t\mathbf{c}A_{n-1}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \mathbf{b} \\ {}^t\mathbf{c} & d \end{bmatrix} = A. \end{aligned}$$

L は性質 2.4.2 より正則.

すると $U = L^{-1}A$ と書け, 正則行列の積は正則だから U も正則.

A_n が正則の仮定より A は正則. $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ より B と C が正則なら BC も正則 (階数に関する定理の証明でも使った). なお, 一般に $\text{rank}(BC) \leq \min\{\text{rank}(B), \text{rank}(C)\}$ であることを使うと, $A = LU$ であれば, $\text{rank}(U) < n \Rightarrow \text{rank}(A) < n$ より A が正則という仮定に反するから, U も正則であることは直ちにいえる.

一意性. $A = LU = L'U'$ となったとすると $L'^{-1}L = U'U^{-1}$ となる. 性質 2.4.1–2.4.4 より左辺は単位下三角行列, 右辺は上三角行列. これは両辺とも単位行列 E であることを意味する. したがって $L = L', U = U'$. $\square$

LU 分解 (# lower, upper), **LR 分解** (# left, right), **ガウス分解** (# Gauss) などと呼ぶ.

固有値, 行列式, 連立方程式の反復計算などに応用がある.

行列式 $|L|, |U|$ は対角成分の積で簡単に計算できる. そして, $|A| = |L||U|$ と計算できる.

連立方程式を b を変えて何度も解く場合に便利. $Ax = b$ を $LUx = b$. $Ux = y$ とおいて $Ly = b$ をまず解いて y を得る. L は下三角だから 1 変数ずつ定めて行ける. 次にこの y を用いて $Ux = y$ を解く.

定義 $\text{diag}[d_{11}, \dots, d_{nn}]$: $d_{11}, \dots, d_{nn}$ を対角成分とする n 次対角行列.

注. u_{ij} の代わりに u_{ij}/u_{ii} を要素とする行列をあらためて U とおき,
 $D = \text{diag}[u_{11}, \dots, u_{nn}]$ とすれば, 単位下三角行列 L と単位上三角行列 U を用いて $A = LDU$ と一意的に書ける. これを **LDU 分解** という.

コレスキー分解

n 次対称行列 A が定理 2.4.1 の条件を満たすとする.

A の LDU 分解 $A = LDU$ を考える.

A は対称だから $A = {}^tA = {}^tU {}^tD {}^tL = {}^tU D {}^tL$. # D は対角行列だから ${}^tD = D$.

tU は下三角, tL は上三角でいずれも対角成分は全て 1.

LDU 分解の一意性より ${}^tU = L$ かつ ${}^tL = U$ でなければならない.

すなわち A は単位下三角行列 L と対角行列 D を用いて $A = LD {}^tL$ と表せる. D の対角成分 d_{ii} が全て正ならば, $\tilde{D} = \text{diag} [\sqrt{d_{11}}, \dots, \sqrt{d_{nn}}]$ に対して $\tilde{L} := L\tilde{D}$ とおけば $\tilde{L}$ は下三角で $A = \tilde{L} {}^t\tilde{L}$. これを **コレスキー (Cholesky) 分解** という.