$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

AとBが単下三

$C = AB$ … Cも単下三

$a_{ii} = b_{ii} = 1$

$a_{ij} = b_{ij} = 0$ $(i<j)$ を使って

$$\begin{cases} C_{ii} = 1 \\ C_{ij} = 0 \quad (i<j) \end{cases}$$ を示す

2.4　掃き出し法とLU分解

定義　対角成分が全て1の下三角行列を単位下三角行列とよぶ．単位上三角行列も同様．# あまり一般的な言葉ではないかもしれない．数学辞典第4版のLU分解の説明には単位左下3角行列，右上3角行列という言葉が使われている．

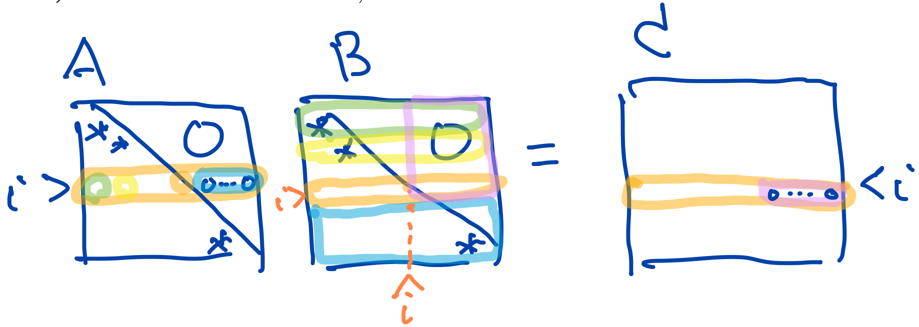
性質 2.4.1　下三角（単位下三角）行列同士の積はやはり下三角（単位下三角）行列になる．

↳ 演習の解答では式で証明すること．

2025.6.11

↑括弧の対応の意味:「下三角同士の積は下三角，単位下三角同士の積は単位下三角」．

証明は演習問題にある．以下直感的説明: 単位下三角行列 A と B．AB の第 i 行めは A の第 i 行めを左から B にかけたもの．これは，A の第 i 行めの最初の $i-1$ 個の要素は非ゼロ，i 個めの要素は 1, それ以降は 0 だから，B の最初の $i-1$ 行の重み付き和と B の第 i 行を（重み無しで）加えたものとなり，最初の $i-1$ 個の要素は非ゼロ，i 個めの要素は 1, それ以降は 0 となる．



A,B 下三角

性質2.4.2　単位下三角行列は正則で，逆行列はやはり単位下三角行列になる．

性質2.4.3　正則な下三角行列の逆行列は下三角行列になる．

性質2.4.4　性質2.4.1–2.4.3は上三角行列に対しても成り立つ．

これらの証明は演習問題にある．

$\mathrm{II}(j \leftarrow i;k)$ の $j<i$ の例 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ← 3行目を5倍して2行目に加える

上三角の部分にきている

iより下に足す

LU 分解 行基本変形 $\mathrm{II}(j \leftarrow i; k)$ $(j > i)$ は単位下三角行列によって表現できる．このような操作のみによって正方行列 A を上三角行列に変換する過程を考える．

上三角 upper triangular

下 〃 lower 〃

例.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}(3 \leftarrow 1; -2)]{(\text{ア})\ \mathrm{II}(2 \leftarrow 1; 2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathrm{II}(3 \leftarrow 2; -2)]{(\text{イ})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = U \text{ とおく．}$$

上三角

(ア) を表す行列: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P_1$ # と置く．

(イ) を表す行列: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = P_2$ # (ア) と (イ) を表す行列がともに単位下三角行列であることに注意．

$$P = P_2P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$ とおく．

\# 性質 2.4.1 から P もやはり単位下三角行列

P^{-1} を求める．

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[]{\substack{\mathrm{II}(2 \leftarrow 1; -2) \\ \mathrm{II}(3 \leftarrow 1; 6)}} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{II}(3 \leftarrow 2; 2)} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = L$$ とおく．

\# 性質 2.4.2 から P^{-1} もやはり単位下三角行列.

$A = P^{-1}PA = P^{-1}U = LU$

$PA = P_2P_1A = U$ だから $A = P^{-1}U = LU$. 実際に計算してみると

$$LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} = A.$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $A_1 = [1]$ $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

このようにAを単位下三角行列Lと上三角行列Uの積に分解できる． いつでもできるわけではない．AからUへの変換の各ステップにおける軸が非ゼロであれば可能．# そうでないとうまく行かない．そのようなときはそうなるように行または列を入れ換えた行列に対して分解可能．

定理2.4.1 n次正方行列Aの部分行列（小行列）で最初のk個の行と列よりなるものをA_kと記す．$A_1, A_2, \ldots, A_n$が全て正則ならば，単位下三角行列Lと正則な上三角行列Uを用いて$A = LU$と一意的に表せる．

$A = [a_{11}] \to L = [1]$, $U = [a_{11}]$

証明．$A = LU$と書けること．nに関する数学的帰納法．$n = 1$ならば明らか．以下$n > 1$．

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad}^{n-1} & \end{array} \\ \begin{array}{c} n-1 \\ 1 \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} A_{n-1} & \boldsymbol{b} \\ \hline {}^t\boldsymbol{c} & d \end{array}\right] \\ & \begin{array}{cc} & \underbrace{\quad}_{1} \end{array} \end{array}$$

と区分け．

定理の仮定より$A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$は正則だから帰納法の仮定より単位下三角行列$L_{n-1}$と正則な上三角行列$U_{n-1}$を用いて$A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}$と表せる．

$$L = \left[\begin{array}{c|c} L_{n-1} & \boldsymbol{o} \\ \hline {}^t\boldsymbol{c}A_{n-1}^{-1}L_{n-1} & 1 \end{array}\right], \quad U = \left[\begin{array}{c|c} U_{n-1} & U_{n-1}A_{n-1}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \hline {}^t\boldsymbol{o} & d - {}^t\boldsymbol{c}A_{n-1}^{-1}\boldsymbol{b} \end{array}\right]$$

とおくと，L は単位下三角行列，U は上三角行列.

$$LU = \begin{bmatrix} L_{n-1}U_{n-1} & L_{n-1}U_{n-1}A_{n-1}^{-1}\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{c}A_{n-1}^{-1}L_{n-1}U_{n-1} & {}^t\boldsymbol{c}A_{n-1}^{-1}L_{n-1}U_{n-1}A_{n-1}^{-1}\boldsymbol{b} + d - {}^t\boldsymbol{c}A_{n-1}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{n-1}A_{n-1}^{-1}\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{c}A_{n-1}^{-1}A_{n-1} & {}^t\boldsymbol{c}A_{n-1}^{-1}A_{n-1}A_{n-1}^{-1}\boldsymbol{b} + d - {}^t\boldsymbol{c}A_{n-1}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{c} & d \end{bmatrix} = A.$$

L は性質 2.4.2 より正則.

すると $U = L^{-1}A$ と書け，正則行列の積は正則だから U も正則.

\# A_n が正則の仮定より A は正則．$(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$ より B と C が正則なら BC も正則 (階数に関する定理の証明でも使った)．なお，一般に $\mathrm{rank}(BC) \leq \min\{\mathrm{rank}(B), \mathrm{rank}(C)\}$ であることを使うと，$A = LU$ であれば，$\mathrm{rank}(U) < n \Rightarrow \mathrm{rank}(A) < n$ より A が正則という仮定に反するから，U も正則であることは直ちにいえる．

2025.6.18

$L'^{-1}L = L'^{-1}\underbrace{LU}U^{-1} = L'^{-1}L'U'U^{-1} = U'U^{-1}$

$\underbrace{LU^{-1}}_{E}$　$\underbrace{L'^{-1}L'}_{E}$　上三

L'^{-1}: 単下三
U^{-1}: 上三

単下三

一意性．$A = LU = L'U'$ となったとすると $L'^{-1}L = U'U^{-1}$ となる．性質 2.4.1–2.4.4 より左辺は単位下三角行列，右辺は上三角行列．これは両辺とも単位行列 E であることを意味する．したがって $L = L'$, $U = U'$. □

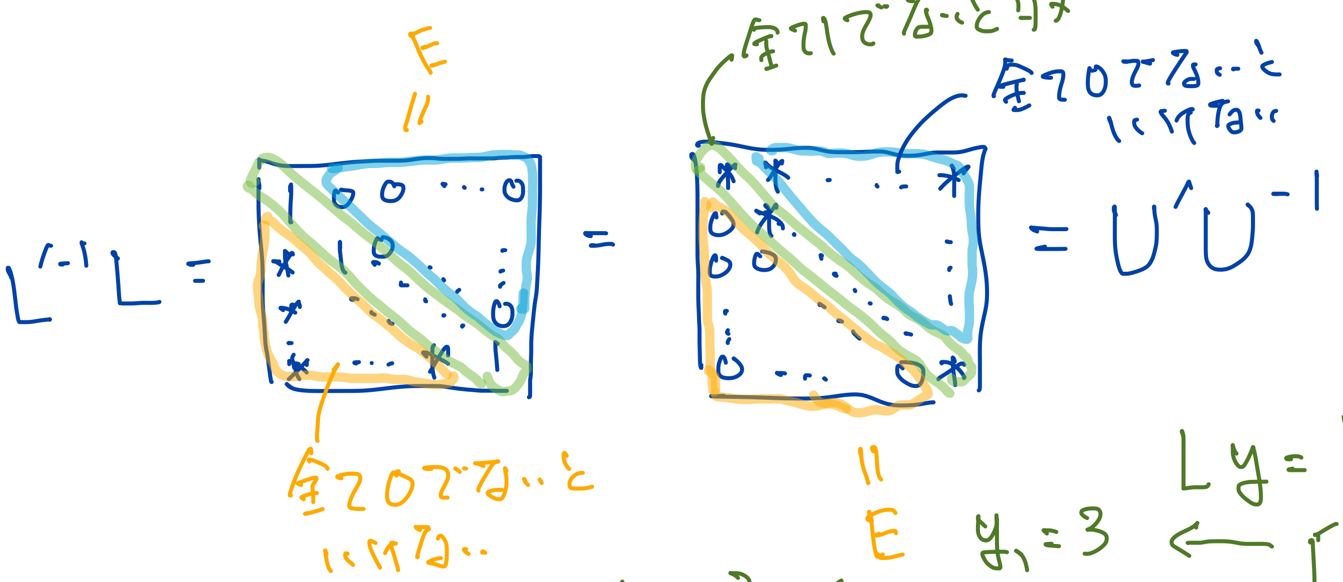
LU 分解 (# lower, upper), **LR 分解** (# left, right), **ガウス分解** (# Gauss) などと呼ぶ．
固有値，行列式，連立方程式の反復計算などに応用がある．

$Ux = y$

行列式 $|L|$, $|U|$ は対角成分の積で簡単に計算できる．そして，$|A| = |L||U|$ と計算できる．
連立方程式を b を変えて何度も解く場合に便利．$Ax = b$ を $LUx = b$. $Ux = y$ とおいて $Ly = b$ をまず解いて y を得る．L は下三角だから 1 変数づつ定めて行ける．次にこの y を用いて $Ux = y$ を解く．

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ \vdots & & & & \\ & & 0 & * & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$*x_{n-1} + *x_n = y_{n-1}$
$*x_{n-1} = y_{n-1} - *x_n$
$*x_n = y_n$



$L'L'^{-1}L = E = L'$
$L = L'$

$U'U^{-1}U = EU$
$U' = U$

$Ly = b$ の例

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 3$

$3y_1 + y_2 = 2$
$\Longleftrightarrow y_2 = 2 - 3y_1 = 2 - 9 = -7$

$\mathrm{diag}[1, 2, 5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ $U' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

<u>定義</u> $\mathrm{diag}[d_{11}, \ldots, d_{nn}]$: $d_{11}, \ldots, d_{nn}$ を対角成分とする n 次対角行列.

$U = DU'$

注．u_{ij} の代わりに u_{ij}/u_{ii} を要素とする行列をあらためて U とおき，$D = \mathrm{diag}[u_{11}, \ldots, u_{nn}]$ とすれば，単位下三角行列 L と単位上三角行列 U を用いて $A = LDU$ と一意的に書ける．これを**LDU 分解**という．

$A = LU$
$= LDU'$

<u>コレスキー分解</u>

n 次対称行列 A が定理2.4.1の条件を満たすとする．

A の LDU 分解 $A = LDU$ を考える．

A は対称だから $A = {}^tA = {}^tU\,{}^tD\,{}^tL = {}^tU\,D\,{}^tL$. # D は対角行列だから ${}^tD = D$.

${}^tU$ は下三角，${}^tL$ は上三角でいずれも対角成分は全て1.

LDU 分解の一意性より ${}^tU = L$ かつ ${}^tL = U$ でなければならない．

すなわち A は単位下三角行列 L と対角行列 D を用いて $A = LD\,{}^tL$ と表せる．D の対角成分 d_{ii} が全て正ならば，$\tilde{D} = \mathrm{diag}\left[\sqrt{d_{11}}, \ldots, \sqrt{d_{nn}}\right]$ に対して $\tilde{L} := L\tilde{D}$ とおけば $\tilde{L}$ は下三角で $A = \tilde{L}\,{}^t\tilde{L}$. これを**コレスキー (Cholesky) 分解**という．

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\tilde{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ $\tilde{D}\tilde{D} = D$

$A = LD\,{}^tL$
$= L\tilde{D}\tilde{D}\,{}^tL$
$= L\tilde{D}\,{}^t\tilde{D}\,{}^tL$

$L\tilde{D} = \tilde{L}$ ${}^t(L\tilde{D})$
$\hookrightarrow A = \tilde{L}\,{}^t\tilde{L}$