$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

2.3 n 変数連立 1 次方程式の解と行列の階数

前節までの結果を n 変数の場合に拡張.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases} \tag{2.15}$$

注. $n \neq m$ であってもよい. # 前節までは $n = m$ である場合のみを見てきた.

(2.15) に対する係数行列 A と拡大係数行列 $\tilde{A}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \tilde{A} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

性質 2.3.1 連立方程式 (2.15) の解の個数

- $\mathrm{rank}(\tilde{A}) > \mathrm{rank}(A)$ の場合
  (2.15) は解を持たない（解不能，条件過剰という）.
- $\mathrm{rank}(\tilde{A}) = \mathrm{rank}(A) = n$ の場合
  (2.15) は解を持ち，かつ一意である.
- $\mathrm{rank}(\tilde{A}) = \mathrm{rank}(A) = r\ (< n)$ の場合
  (2.15) は解を持ち，$n - r$ 個の任意定数を含む（解不定，条件不足という）.

$n - \mathrm{rank}(A)$ を解の自由度という.

証明は行わない．例えば齋藤正彦「線型代数入門」の 2 章 §5「一次方程式系」の証明は解の構成法を与える.

3 次元 ($n = 3$) の場合の自由度のイメージ: 自由度 0 なら解は 1 点に定まり，自由度 1 なら直線，2 なら平面上に無数に解がある.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} l_1 = 1 \\ l_2 = 2 \\ l_3 = 4 \\ l_4 = 6 \\ l_5 = 6 \end{array} \quad n = 6, \quad a = 4$$

定義（階段行列）

$m \times n$ 行列 A の第 i 行を左から見ていき，はじめて0でない成分が現れるまでの0の個数を l_i とする．

there exists

$\exists a \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $l_1 < l_2 < \cdots < l_a = l_{a+1} = \cdots = l_m = n$

または $l_1 < l_2 < \cdots < l_m < n$

を満たすとき，A を**階段行列**という．

$$\begin{array}{l} l_1 = 1 \\ l_2 = 2 \\ l_3 = 3 \\ l_4 = 5 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad n = 6$$

for all

\# 記号 $\exists$ と $\forall$: e.g., 「$\exists x \in [a, b]$, $f(x) = 0$」は「$f(x) = 0$ となる x が区間 $[a, b]$ 内に存在する」ことを，「$\forall x \in [a, b]$, $f(x) = 0$」は「区間 $[a, b]$ 内のすべての x に対して $f(x) = 0$ が成立する」ことを意味する．

\# 階段行列は echelon matrix か matrix in echelon form.

\# 次に手続き Echelon を説明する準備として空行列 (empty matrix) を定義.

空行列: 行または列（あるいはその両方）の数が0であるような行列.

同点… → 階段行列ではない

$$\begin{array}{l} l_1 = 1 \\ l_2 = 2 \\ l_3 = 2 \\ l_4 = 3 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

左右の比が1に収束

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{⑦} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \times(-2)$$

理由

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A_1

階段行列への変形法

以下では a_{ij} は変形を加えた各時点での (i,j) 成分を表すものとする．

ECHELON(A)

Step 1. $A = O$ あるいは A が空行列ならば A を出力して終了．

Step 2. 0でない成分を1つ以上持つ最も左の列を第 l_1+1 列とする．$a_{1,l_1+1} = 0$ ならば $a_{k,l_1+1} \neq 0$ であるような k に対して $\mathrm{III}(1 \leftrightarrow k)$ を行う． # 1行と k 行を入換

国際標準ではない

Step 3. $i = 2, 3, \ldots, m$ に対して，$\mathrm{II}(i \leftarrow 1; -a_{i,l_1+1}/a_{1,l_1+1})$ を行う．⑦

Step 2 の結果 $a_{1,l_1+1} \neq 0$ となっている．第 i 行から第1行の $a_{i,l_1+1}/a_{1,l_1+1}$ 倍を引く．

Step 4. 第1列〜第 l_1+1 列及び第1行を取り除いて得られる行列を $\boxed{A_1}$ とおく．

Step 5. $A_1' :=$ ECHELON(A_1) としたのち # 講義では := で代入を表す．

prime

$$A' := \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1,l_1+1} & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & A_1' & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & & \end{array}\right]$$

とする．A' を出力して終了．

「←」も代入に使われる

ダッシュ …「—」 e.g., pp. 15—31

ダッシュ

ハイフン …「-」 e.g., real-world applications

ハイフン

3.14　　3,14

2025.5.28

<u>性質 2.3.2</u>　rank(A) = 手続き ECHELON(A) により得られた行列のうち 0 でない成分を含む行の数.

注．Step 2 の a_{k,l_1+1}（**軸，pivot**）の選び方により得られる階段行列は異なる可能性がある．しかし得られる rank の値は軸の選び方に寄らないことが知られている.

例題．次の行列を階段行列に変形し，階数を求めよ.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 3 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -2 & 5 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & -7 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$\times(-2) \longrightarrow$

定義 列基本変形:

1. ある列に0でない数をかける.
2. ある列に他のある列の定数倍を加える.
3. 2つの列を入れ換える.

これらの操作を表す記号を定義しておく.

- 操作 $\mathrm{I}'(i;k)$: 第 i 列を k 倍する $(k \neq 0)$.
- 操作 $\mathrm{II}'(i \leftarrow j;k)$: 第 i 列に第 j 列の k 倍を加える.
- 操作 $\mathrm{III}'(i \leftrightarrow j)$: 第 i 列と第 j 列を入れ換える.

性質 2.3.3 列基本変形により階数は変化しない.

注. 連立方程式の解を求める場合には列基本変形を安易に適用してはならない.

rank の計算は行と列の基本変形を同時に行って行列を階段状にすることでも求められる．なお，これまでの rank の計算法では，得られる rank の値が行基本変形の仕方に寄らないことを証明しなかったが，次の定義についてはこれを証明する．そのための準備をいくつか行う．

準備　# 行基本変形を，左から行列をかけることで実現できることに触れた．これが一般的にできることを見るために，左からかける行列を行ベクトルに分解して考える．

$$[\alpha, \beta, \gamma]\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = [\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3, \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3, \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3]$$
$$= \alpha[a_1, b_1, c_1] + \beta[a_2, b_2, c_2] + \gamma[a_3, b_3, c_3].$$

1次結合
線形結合

行列に左から行ベクトルをかける

＝ 行列の各行をベクトルとみて，それらに係数をかけて加える

ベクトルに
スカラーをかけて
足したもの

列についても同様に以下．

例． $$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5 + (-1)\cdot(-7) \\ 2\cdot 5 + 3\cdot(-7) \end{bmatrix} = 5\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-7)\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

行列に右から列ベクトルをかける

＝ 行列の各列をベクトルとみて，それらに係数をかけて加える

$B_1 A = C$　Cは，Aの3行目をk倍したもの

<u>行基本変形を実現する行列</u>　e.g., $5 \times n$ 行列に対する行基本変形（0は省略）

I$(3;k)$: $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & & \bigcirc & \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ & & & 1 & \\ & \bigcirc & & & 1 \end{bmatrix}$

3行目をk倍

この行べ.を Aにかけると Aの3行目の k倍になる.

かけ算の結果の3行目

II$(4 \leftarrow 2;k)$: $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2行目のk倍を 4行目に足す

この行べ.をAに 左からかけると Aの2行目のk倍と Aの4行目の1倍を 足したもの

III$(2 \leftrightarrow 5)$: $B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2行目と5行目 を入れかえる

5

2

これらを左からかけることで行基本変形を実現.

\# これらの行列の各行ベクトルの意味を，上で説明した「ベクトルを左からかける」意味で理解し，第 i 行めに対するそのような積の結果が計算後の行列の第 i 行に現れることを想像せよ.

<u>性質2.3.4</u>

$(\underbrace{B_4 B_1}_{=E})A = A$

　行基本変形を表す行列は正則．逆行列は元に戻す操作に対応する行列.

$B_4(B_1 A) = A$

例．I$(i;k)$ ↔ I$(i;1/k)$ # 第 i 行を k 倍 ↔ k で割る.

(B_1 = I$(i;k)$, B_4 = I$(i;1/k)$)

　II$(i \leftarrow j;k)$ ↔ II$(i \leftarrow j;-k)$ # 第 j 行の k 倍を第 i 行に加える ↔ j 行の k 倍を i 行から引く.

　III$(i \leftrightarrow j)$ ↔ III$(i \leftrightarrow j)$ # 第 i 行と第 j 行を入れ換える ↔ もう一度それらを入れ換える

列基本変形: 同様の正則な行列を右からかけることで実現できる.

<u>補題2.3.1</u>　A, X: n次正方行列.

$$\exists X,\ (XA = E \vee AX = E) \implies A\text{は正則，} X = A^{-1}.$$

OR

\# $P \vee Q$ は P と Q の少なくとも一方が真という意味.　　$P \wedge Q$ ← and PとQの両方が真なら真

証明．$XA = E$ を仮定する場合．n に関する数学的帰納法．$n = 1$ ならば自明．以下 $n > 1$ とし，$n - 1$ 次行列では補題は正しいと仮定．

A は零行列ではないから行と列の入れ替えを必要なら適宜行い，a_{11} が 0 でないようにする．$\mathrm{I}(1; 1/a_{11})$ を行ったのち (1,1) を軸に第 1 行と第 1 列を掃き出せば

$$B = \begin{bmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & A_1 \end{bmatrix}$$

\# $\boldsymbol{o}$ は全ての要素が 0 の列ベクトル.

の形にできる．これらの行と列の基本変形を行う行列をそれぞれ P と Q とすれば $PAQ = B$．B の区分けに応じて

$$Q^{-1}XP^{-1} = \begin{bmatrix} u & {}^t\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{y} & X_1 \end{bmatrix}$$

と区分け. $(Q^{-1}XP^{-1})(PAQ) = Q^{-1}XAQ = Q^{-1}EQ = E$ であるから

$$\begin{bmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & E_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & {}^t\boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{y} & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & {}^t\boldsymbol{z}A_1 \\ \boldsymbol{y} & X_1A_1 \end{bmatrix}.$$

したがって $X_1A_1 = E_{n-1}$. よって帰納法の仮定により A_1 は正則.

$$\begin{bmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & A_1^{-1} \end{bmatrix}$$

が B の逆行列になることは容易に確認できるから B は正則.

$A = P^{-1}BQ^{-1}$ だから A も正則, i.e., 逆行列 A^{-1} が存在.

$XA = E$ の右から A^{-1} をかけると $X = A^{-1}$.

$AX = E$ を仮定する場合は転置して同様の議論をすればよい. □

講義後このページに加筆しました(主に色づけ).

定理2.3.1 $m \times n$行列Aに行と列の基本変形を何回か施すことにより，標準形

$$F_{m,n}(r) = \begin{bmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix}}_{r\text{ 個}} & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$E_r =$ (upper-left block), O, O, O

に変換できる．rの値はAのみによって定まり，基本変形の仕方によらない．

$$F_{5,6}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

E_3

2025. 6. 4

証明．標準形にできること． # 講義ではこちらは使わず次ページの方で説明．本質は同じ．

数学的帰納法．$m = 1$ or $n = 1$ ならば自明.

1列か1行なので非零要素があれば先頭に持ってきて1にし2行/列目以下を掃き出せばよい.

以下 $m > 1$ かつ $n > 1$ とし,

$(m-1)\times(n-1)$ 行列は標準形に変形できると仮定.

$A = O$ なら A 自身が標準形 $F_{m,n}(0)$.

$A \neq O$ のとき，行と列の入れ替えを必要なら適宜行い，a_{11} が0でないようにする．I$(1; 1/a_{11})$ を行ったのち (1,1) を軸に第1行と第1列を掃き出せば

$$\begin{bmatrix} 1 & {}^t\boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{o} & A_1 \end{bmatrix} \quad \text{\# すなわち} \rightarrow \left[\begin{array}{c:ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

の形にできる．帰納法の仮定より A_1 は標準形に変形できる．したがって A も標準形に変形できる.

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&2&0&4&0\\0&0&1&0&2\\0&1&0&2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&2&0&4&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&2\\0&1&0&2&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&0&0&4&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&2\\1&0&0&2&0\end{bmatrix}\times(1/2)$$

標準形にできること．

$A=O$ なら A 自身が標準形 $F_{m,n}(0)$．

$A\neq O$ のとき，行と列の入れ替えを必要なら適宜行い，a_{11} が 0 でないようにする．I$(1;1/a_{11})$ を行ったのち (1,1) を軸に第 1 行と第 1 列を掃き出せば

$$\left[\begin{array}{c|ccc}1&0&\cdots&0\\\hline 0&&&\\\vdots&&A_1&\\0&&&\end{array}\right]\qquad(*)$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&2&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&2\\1&0&0&2&0\end{bmatrix}\times(-1)\to\begin{bmatrix}1&0&0&2&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

の形にできる．

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\times(-2)}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{\times(-2)}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$A_1=O$ なら $(*)$ は標準形 $F_{m,n}(1)$．

$A_1\neq O$ ならば同様の操作で

つまり行と列を適宜入れ替えて $a_{22}\neq 0$ とし，I$(1;1/a_{22})$ を行ったのち $(2,2)$ を軸に掃き出すことで．

$$\left[\begin{array}{cc|ccc}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\\hline 0&0&&&\\\vdots&\vdots&&A_2&\\0&0&&&\end{array}\right]$$

の形にできる．以上を可能な限り続ければ標準形に達する．

標準形が一意であること．二通りの標準形 $F(r) = F_{m,n}(r)$ と $F(s) = F_{m,n}(s)$ を持つと仮定．(# つまり基本変形の仕方により行き着いた先が異なったと仮定.)

wlog $r \leq s$. (# wlog は without loss of generality の略で，w.l.o.g. と書くこともある.)

基本変形は可逆だから $F(r)$ と $F(s)$ は一連の基本変形によって移りあう．

(# ともに A から基本変形によって得られたものだから.)

したがって m 次正則行列 P と n 次正則行列 Q により

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, squiggly] \arrow[d, squiggly] & F(r) \arrow[dl, squiggly] \\
F(s) &
\end{tikzcd}
$$

$r \leq s$ の仮定より □ は E_r

$$F(s) = PF(r)Q$$

と表される．P, Q の行と列を r 番目で切って区分けし

$$F(s) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & O \\ \hline O & \begin{matrix}\ddots & & O \\ & \ddots & \\ O & & \ddots\end{matrix} \end{array}\right]$$

$r<s$ なら ここに 1が存在

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$$

とすれば

$$F(s) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}}_{F(r)} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}Q_{11} & P_{11}Q_{12} \\ P_{21}Q_{11} & P_{21}Q_{12} \end{bmatrix}.$$

Q_{11} P_{11}

P_{11}をA, Q_{11}をXとして Lemma 2.3.1を使う

→ P_{11}が正則であることがいえる

Q_{11}

左から両辺にP_{11}^{-1}をかける

$Q_{12} = P_{11}^{-1} P_{11} Q_{12} = P_{11}^{-1} O_{r,n-r} = O$

$r \leq s$の仮定より

$$P_{11}Q_{11} = E_r, \quad P_{11}Q_{12} = O_{r,n-r}, \quad P_{21}Q_{11} = O_{m-r,r}.$$

補題2.3.1よりP_{11}とQ_{11}は正則．したがって$Q_{12} = O_{r,n-r}$, $P_{21} = O_{m-r,r}$. これらより$\boxed{P_{21}Q_{12}} = O_{m-r,n-r}$. これは$s = r$を意味する. □

性質2.3.5　$r = \mathrm{rank}(A)$　（rankの定義のひとつ）.

定理2.3.2　A: n次正方行列．Aが正則 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}(A) = n$.

証明．$PAQ = F_{n,n}(r)$とする（PとQは正則）.
Aが正則ならばPAQも正則だから$r = n$でなければならない.

$r < n$なら$F_{n,n}(r)$に0のみの行 (列) ができるが，そのような行 (列) があると逆行列は存在し得ない.

PとQは正則（性質2.3.4）．正則行列の積は正則．BとCが正則なら$C^{-1}B^{-1}$がBCの逆行列になるから.

$r = n$ならば$F_{n,n}(r) = E$であるから$A = P^{-1}EQ^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$となる.
したがってAは正則. □

行列の階数のさまざまな定義

- 行基本変形および列基本変形により階段行列に変形したときの，0でない成分を含む行の個数
- 値が0でない小行列式（3.2節）の最大次数
- **1次独立**（4.3節）な行ベクトルの最大個数
- 1次独立な列ベクトルの最大個数
- 行ベクトルの張る線形空間（4.2節）の次元（4.3節）
- 列ベクトルの張る線形空間の次元
- 行列の表す線形写像の像空間（5.1節）の次元

これらが全て同値であることの証明は講義では行わない．齋藤著の本などを参照.
括弧の中の節番号は現在未定義の言葉の説明を行う節番号で，4章以降は後期.