(1) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\times(-2)\ \times(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ \boxed{0} & 1 & 1 & -1 \\ \boxed{0} & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\times(-1)\ \times(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \boxed{0} & 9 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \cdots$

2.2　3変数連立方程式の解

前節の考察を3変数の場合に拡張する．

例題．　次の連立1次方程式を掃き出し法を用いて解け．

(1) $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+5y+7z=5 \\ x+2y+4z=1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x+5y+7z=5 \\ x+3y+4z=2 \\ 3x+5y+8z=4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+5y+7z=5 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 5x+10y+15z=3 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 2x+4y+6z=6 \\ 4x+8y+12z=12 \end{cases}$

2変数の場合を参考に各自計算してみよ．rank$(\tilde{A})$ と rank(A) の値も計算せよ．軸 (pivot) を決めてその列の軸以外を0にして行く操作を繰り返して階段状にしていけばよい．

例題の解の個数と rank の関係

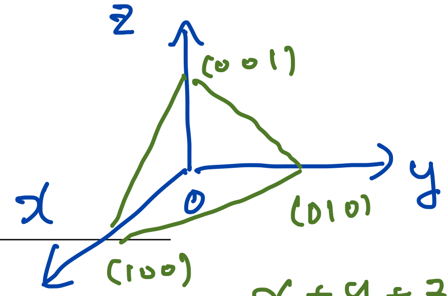
	未知数の個数		$\mathrm{rank}(\tilde{A})$		$\mathrm{rank}(A)$	解の個数
( )	3	$>$	1	$=$	1	無数に存在（任意定数を 2 個含む）
( )	3	$>$	2	$>$	1	なし
( )	3	$>$	2	$=$	2	無数に存在（任意定数を 1 個含む）
( )	3	$=$	3	$>$	2	なし
( )	3	$=$	3	$=$	3	ただ 1 つ存在

↑例題の (1) から (5) はそれぞれどの場合に相当するか? かっこ内に番号を記せ.

$\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(\tilde{A}) \rightarrow$ 解なし.

$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(\tilde{A}) \rightarrow$ 解が存在し，$3 - \mathrm{rank}(A)$ 個の任意定数を含む.

2 変数の場合を参考に幾何学的な意味を考えよ．すなわち上の 5 つの各場合に 3 平面はどう交わるか?



$x+y+z=1$

↑

3変数の1次式

→ 平面に対応

掃き出し法と逆行列

3×3 行列 A に対して

Aの逆行列を求めたい

①

$AX = E$

をみたすXを求めたい

X

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$$

㋐の拡大係数行列

$\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right]$

㋑ $\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right]$

㋒ $\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right]$

とおくと，$AA^{-1} = E$ は次の3つの連立1次方程式と同値:

①の左辺の1列目と右辺の1列目が等しい

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \overset{㋐}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \overset{㋑}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} \overset{㋒}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

←Eの1列目 ←Eの2列目 ←Eの3列目

これを以下の拡大係数行列を用いてまとめて解くことができる:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

連立方程式を解くために行う掃き出し操作は左側を単位行列に持って行くように行う．1つめの連立方程式を解くために行った掃き出し操作を適用すれば2つめと3つめも解ける．これをまとめて書いただけ．

2025.5.21

掃き出し法による逆行列の求め方

Step 1. 与えられた正則なn次正方行列Aに対し，$\left[\begin{array}{c:c} A & E \end{array}\right]$を作る．

Step 2. $\left[\begin{array}{c:c} A & E \end{array}\right]$に行基本変形を適用して，$\left[\begin{array}{c:c} E & B \end{array}\right]$という形に変形する．得られた$B$が$A$の逆行列である．

\# Aが正則でない場合は左側がEにならず，$\mathrm{rank}(A) < n$であることが分かる．

例題.

行列$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$と単位行列$E$に対して

$P = (E - A)(E + A)^{-1}$を計算し，Pが直交行列になっていること

(i.e., $P\,{}^tP = {}^tPP = E$)を確認せよ．

参考　実交代行列 A $({}^t\!A = -A)$ に対して $E + A$ は正則であり，

$$P = (E - A)(E + A)^{-1}$$

は直交行列になる（つまり $P\,{}^t\!P = {}^t\!PP = E$）．
また，直交行列 P に対して $E + P$ が正則であれば，

$$A = (E - P)(E + P)^{-1}$$

は交代行列になる．このような変換を**ケーリー (Cayley) 変換**という．

演習問題を解いて理解を深めよ．