2　連立1次方程式の解法

2.1　2変数連立1次方程式の解

2変数x, yに関する連立1次方程式を考える.

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases} \tag{2.1}$$

解がない場合，一意に定まる場合，無数に存在する場合がある.

例.　(1) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$

解答.　(1) $x = 4,\ y = 3.$ (2) 解なし.　(3) $x = 10 - 2t,\ y = t.$

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$ (2.1)

2.1.1　行列の積による表現

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

を用いて，(2.1) を

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} \tag{2.2}$$

と書くことができる．

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

(2.2) の A: 係数行列.

拡大係数行列

チルダー

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c:c} A & \boldsymbol{p} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:c} a & b & p \\ c & d & q \end{array}\right].$$

$$(1)\ \begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$$

例の(1)を行列で表現すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{=E}\,x = A^{-1}p$$

$$= x$$

左辺の係数行列の逆行列は(1.4)より,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 4 - 1 \cdot 2} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

これを(2.5)に左からかけて

$$(2)\ \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

行列で表すと

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 20 \end{bmatrix}$$

例(2)と(3)では行列式$1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$となり逆行列が存在しない.

このとき，係数行列だけでは「解なし」か「解が無数に存在」を判別できない.

2025.5.7

$$(1)\ \left\{\begin{array}{ll} x+y=7 & \cdots ア \\ 2x+4y=20 & \cdots イ \end{array}\right.$$

A: イ × $\frac{1}{2}$ → $x+2y=10$ … イ'　　C: ア − ウ

B: イ' − ア　　$y=3$ … ウ　　$x=4$ … エ

2.1.2　拡大係数行列の利用

例(1)を考える.

アとイ　　アとイ'　　アとウ　　エとウ

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 20 \end{array}\right] \times\tfrac{1}{2} \xrightarrow{Ⓐ} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 10 \end{array}\right] \times(-1) \xrightarrow{Ⓑ} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \times(-1) \xrightarrow{Ⓒ} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \tag{2.8}$$

1−1　2−1　10−7

1−0　1−1　7−3

E

$E \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\parallel$

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

操作Ⓐ: 第2行を2で割る.

操作Ⓑ: 第2行から第1行を引く.

操作Ⓒ: 第1行から第2行を引く.

変形結果より解$x=4, y=3$が得られる.

\# もとの係数行列Aに対応する部分が単位行列Eになるように変形している.
Ⓒの操作ののち，一番右の列に解が得られている.
連立方程式を解くための計算を係数だけに注目して行っている.
各操作の前後で連立方程式の同値性が保たれていて，逆にたどって前に戻ることができる.

(2) $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} x + 2y = 10 \\ 2x + 4y = 20 \end{cases}$

例 (2):

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 20 \end{array}\right] \times\tfrac{1}{2} \xrightarrow{\text{Ⓐ}} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 10 \end{array}\right] \times(-1) \xrightarrow{\text{Ⓑ}} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

最後の行が $0 \cdot x + 0 \cdot y = 3$ に対応．矛盾．つまり解なし．

例 (3):

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \end{array}\right] \times\tfrac{1}{2} \xrightarrow{\text{Ⓐ}} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & 10 \end{array}\right] \times(-1) \xrightarrow{\text{Ⓑ}} \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x+2y=10$

$\downarrow$

$\begin{cases} y = t \\ x = 10-2t \end{cases}$

$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$

最後の行列の右下が 0．矛盾は生じず，解が存在．

$$\left[\begin{array}{cc:c} 0 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \end{array}\right]$$

2.1.3　行列の階数

<u>定義</u>　**行基本変形**:

1. ある行に0でない数をかける.
2. ある行に他のある行の定数倍を加える.
3. 2つの行を入れ換える.

これらの操作を表す記号を定義しておく.

- 操作 $\mathrm{I}(i;k)$: 第 i 行を k 倍する（$k \neq 0$）.
- 操作 $\mathrm{II}(i \leftarrow j;k)$: 第 i 行に第 j 行の k 倍を加える.
- 操作 $\mathrm{III}(i \leftrightarrow j)$: 第 i 行と第 j 行を入れ換える.

列基本変形も同様（後述）.

連立方程式を解くときには
容易に使ってはダメ

掃き出し法: (2.8) のように拡大係数行列に行基本変形を適用することで解を求める方法.

一般的ではない. 断りなく使っても理解してもらえない

$I(1;5)$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$[5,0]A =$ $5\cdot[1,2] + 0\cdot[3,4]$

$[0,1]A =$ $0\cdot[1,2] + 1\cdot[3,4]$

授業後に色を変更し少し追記しました。

2×2行列の行基本変形は以下の行列を左からかけることに対応:

$\mathrm{I}(1;k)$: $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{I}(2;k)$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

1行目をk倍　　2行目をk倍

$\mathrm{II}(1\leftarrow 2;k)$: $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{II}(2\leftarrow 1;k)$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

2行目のk倍を1行目に加える

[1行目の1倍]+[2行目のk倍]がかけた結果の1行目

$\mathrm{III}(1\leftrightarrow 2)$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

例. (2.8) の各操作は次の行列を左からかけることに対応:

$$\text{操作Ⓐ}: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \text{操作Ⓑ}: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{操作Ⓒ}: \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

階段行列

0以外

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0でもOK

3行

→ rank = 3

<u>定義</u>（行列の階数）

$m \times n$ 行列 A に行基本変形を繰り返し適用することで

- 第 k 行までは各行に 0 でない成分が 1 つ以上存在,
- 第 $k+1$ 行以下の行の成分は全て 0

となるような k $(0 \leq k \leq m)$ の最小値を A の**階数** (rank) とよび，$\mathrm{rank}(A), r(A)$ などで表す.

\# 講義では $\mathrm{rank}(A)$ の方を使う.

一般の $m \times n$ 行列の階数の計算法については後で 2.3 節できちんと説明するが，掃き出し法で行列を階段状に変形した結果残っている非ゼロ行の本数が階数となり，基本変形の仕方によらないことが知られているので，「k の最小値」のところはそれほど気にしなくてよい.

2025.5.14

3つの例についてrankを計算.

$$(1)\ \tilde{A} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 20 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]. \quad \mathrm{rank}(\tilde{A}) = 2.$$

← 非0要素のある行が2行

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \mathrm{rank}(A) = 2.$$

$$(2)\ \tilde{A} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 20 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]. \quad \mathrm{rank}(\tilde{A}) = 2.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \mathrm{rank}(A) = 1.$$

$$(3)\ \tilde{A} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 10 \\ 2 & 4 & 20 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \quad \mathrm{rank}(\tilde{A}) = 1.$$

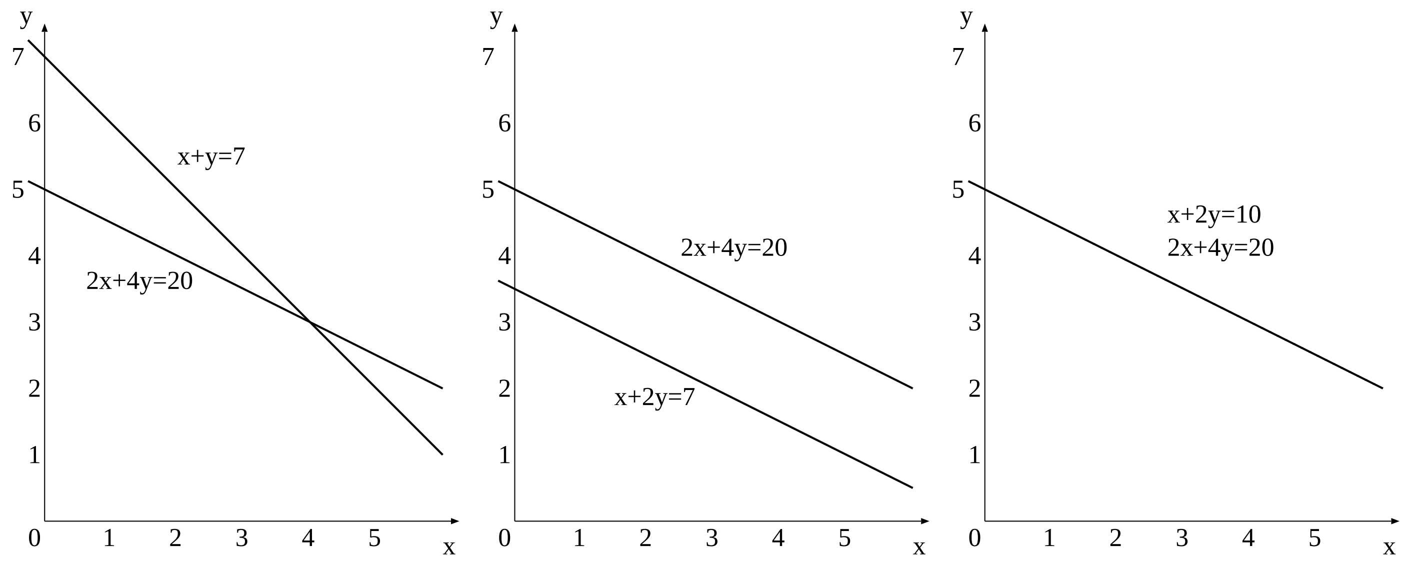
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \mathrm{rank}(A) = 1.$$

$$(1)\ \begin{cases} x+y=7 \\ 2x+4y=20 \end{cases} \quad (2)\ \begin{cases} x+2y=7 \\ 2x+4y=20 \end{cases} \quad (3)\ \begin{cases} x+2y=10 \\ 2x+4y=20 \end{cases}$$

連立方程式の解の個数とrankの関係

	未知数の個数		$\mathrm{rank}(\tilde{A})$		$\mathrm{rank}(A)$	解の個数
(1)	2	$=$	2	$=$	2	ただ1つ存在
(2)	2	$=$	2	$>$	1	なし
(3)	2	$>$	1	$=$	1	無数に存在（任意定数を1個含む）

幾何学的意味



(1) (2) (3)

\# (1) では交点 $(4, 3)$ 存在，(2) では平行な 2 直線で交点がない，(3) では 2 直線が一致して全ての点がもとの 2 式を満たす.

$\mathrm{rank}(A) < 2 \to 2$ 直線は平行．$\mathrm{rank}(\tilde{A}) < 2 \to 2$ 直線が一致.